

下册目录

第八章 向量代数与空间解析几何

- 习题 8-1 向量及其线性运算
- 习题 8-2 数量积 向量积 混合积
- 习题 8-3 平面及其方程
- 习题 8-4 空间直线及其方程
- 习题 8-5 曲面及其方程
- 习题 8-6 空间曲线及其方程
- 总习题八

第九章 多元函数微分法及其应用

- 习题 9-1 多元函数的基本概念
- 习题 9-2 偏导数
- 习题 9-3 全微分
- 习题 9-4 多元复合函数的求导法则
- 习题 9-5 隐函数的求导公式
- 习题 9-6 多元函数微分学的几何应用
- 习题 9-7 方向导数与梯度
- 习题 9-8 多元函数的极值及其求法
- 习题 9-9 二元函数的泰勒公式
- 习题 9-10 最小二乘法
- 总习题九

第十章 重积分

- 习题 10-1 二重积分的概念与性质
- 习题 10-2 二重积分的计算法
- 习题 10-3 三重积分
- 习题 10-4 重积分的应用
- 习题 10-5 含参变量的积分
- 总习题十

第十一章 曲线积分与曲面积分

- 习题 11-1 对弧长的曲线积分
- 习题 11-2 对坐标的曲线积分
- 习题 11-3 格林公式及其应用
- 习题 11-4 对面积的曲面积分
- 习题 11-5 对坐标的曲面积分
- 习题 11-6 高斯公式 通量与散度
- 习题 11-7 斯托克斯公式 环流量与旋度
- 总习题十一

第十二章 无穷级数

- 习题 12-1 常数项级数的概念和性质
- 习题 12-2 常数项级数的审敛法
- 习题 12-3 幂级数
- 习题 12-4 函数展开成幂级数
- 习题 12-5 函数的幂级数展开式的应用
- 习题 12-6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质
- 习题 12-7 傅里叶级数
- 习题 12-8 一般周期函数的傅里叶级数
- 总习题十二

向量代数与空间解析几何

习题 8-1

向量及其线性运算

1. 设 $u = a - b + 2c, v = -a + 3b - c$. 试用 a, b, c 表示 $2u - 3v$.

$$\begin{aligned}\text{解 } 2u - 3v &= 2(a - b + 2c) - 3(-a + 3b - c) \\ &= 5a - 11b + 7c.\end{aligned}$$

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.

证 如图 8-1, 设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M , 已知 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}$.

故

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC}.$$

即 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, 因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

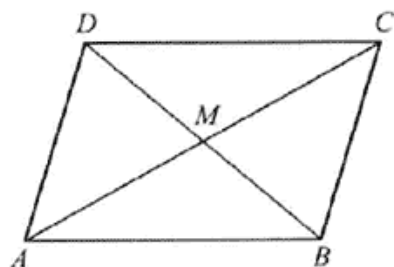


图 8-1

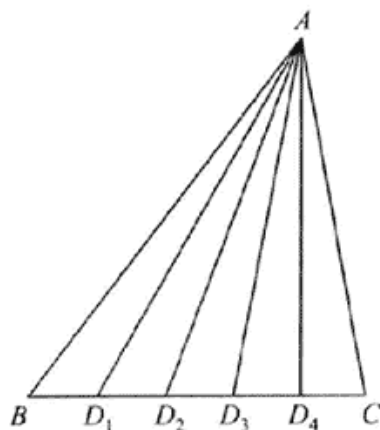


图 8-2

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 , 再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB} = c, \overrightarrow{BC} = a$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

证 如图 8-2, 根据题意知

$$\overrightarrow{BD_1} = \frac{1}{5}a, \overrightarrow{D_1D_2} = \frac{1}{5}a, \overrightarrow{D_2D_3} = \frac{1}{5}a, \overrightarrow{D_3D_4} = \frac{1}{5}a,$$

故

$$\overrightarrow{D_1A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}) = -\frac{1}{5}a - c.$$

$$\overrightarrow{D_2A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_2}) = -\frac{2}{5}a - c.$$

$$\overrightarrow{D_3A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_3}) = -\frac{3}{5}a - c.$$

$$\overrightarrow{D_4A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_4}) = -\frac{4}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

- 例 4. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-0, -1-1, 0-2) = (1, -2, -2).$

$$-2\overrightarrow{M_1M_2} = -2(1, -2, -2) = (-2, 4, 4).$$

- 例 5. 求平行于向量 $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

解 向量 $\mathbf{a}$ 的单位向量为 $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, 故平行于向量 $\mathbf{a}$ 的单位向量为

$$\pm \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \pm \frac{1}{11}(6, 7, -6) = \pm \left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11} \right),$$

其中 $|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11.$

- 例 6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1, -2, 3), B(2, 3, -4), C(2, -3, -4), D(-2, -3, 1).$$

解 A 点在第四卦限, B 点在第五卦限, C 点在第八卦限, D 点在第三卦限.

- 例 7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$$A(3, 4, 0), B(0, 4, 3), C(3, 0, 0), D(0, -1, 0).$$

解 在坐标面上的点的坐标, 其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 比如 xOy 面上的点的坐标为 $(x_0, y_0, 0)$, xOz 面上的点的坐标为 $(x_0, 0, z_0)$, yOz 面上的点的坐标为 $(0, y_0, z_0)$.

在坐标轴上的点的坐标, 其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零. 比如 x 轴上的点的坐标为 $(x_0, 0, 0)$, y 轴上的点的坐标为 $(0, y_0, 0)$, z 轴上点的坐标为 $(0, 0, z_0)$.

A 点在 xOy 面上, B 点在 yOz 面上, C 点在 x 轴上, D 点在 y 轴上.

- 例 8. 求点 (a, b, c) 关于 (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 点 (a, b, c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a, b, -c)$, 关于 yOz 面的对称点是 $(-a, b, c)$, 关于 zOx 面的对称点为 $(a, -b, c)$.

(2) 点 (a, b, c) 关于 x 轴的对称点是 $(a, -b, -c)$, 关于 y 轴的对称点是 $(-a, b, -c)$, 关于 z 轴的对称点是 $(-a, -b, c)$.

(3) 点 (a, b, c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a, -b, -c)$.

- 例 9. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 设空间直角坐标系如图 8-3, 根据题意, P_0F 为点 P_0 关于 xOz 面的垂线, 垂足 F 坐标为 $(x_0, 0, z_0)$; P_0D 为点 P_0 关于 xOy 面的垂线, 垂足 D 坐标为 $(x_0, y_0, 0)$; P_0E 为点 P_0 关于 yOz 面的垂线, 垂足 E 坐标为 $(0, y_0, z_0)$.

P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线, 垂足 A 的坐标为 $(x_0, 0, 0)$; P_0B 为点 P_0 关于 y 轴

的垂线,垂足 B 的坐标为 $(0, y_0, 0)$; P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线,垂足 C 的坐标为 $(0, 0, z_0)$.

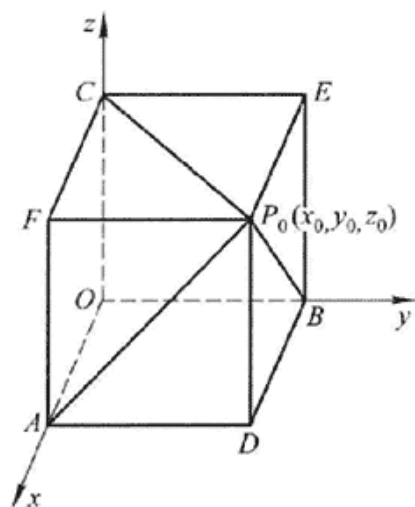


图 8-3

例 10. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 如图 8-4,过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标,其特点是,它们的横坐标均相同,纵坐标也均相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标,其特点是,它们的竖坐标均相同.

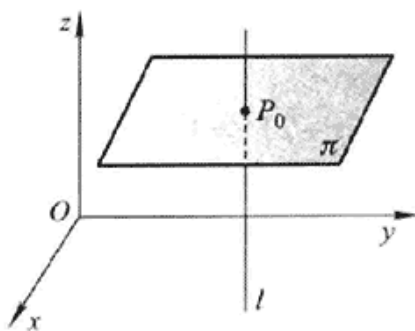


图 8-4

例 11. 一边长为 a 的正方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

解 如图 8-5,已知 $AB = a$,故 $OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,于是各顶点的坐标分别为

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), F\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), \\ G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), H\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right).$$

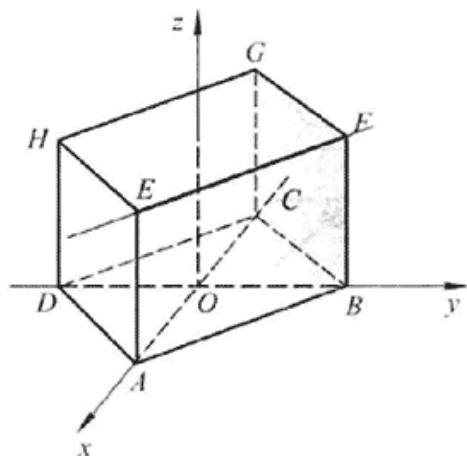


图 8-5

12. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离 $d_1 = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$, 点 M 到 y 轴的距离 $d_2 = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$, 点 M 到 z 轴的距离 $d_3 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

13. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 所求点在 yOz 面上, 不妨设为 $P(0, y, z)$, 点 P 与三点 A, B, C 等距离.

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}, \quad |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2},$$

$$|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2}.$$

由 $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|$ 知

$$\sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases} 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16 + (y+2)^2 + (z+2)^2, \\ 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2. \end{cases}$$

解上述方程组, 得 $y=1, z=-2$. 故所求点坐标为 $(0, 1, -2)$.

14. 试证明以三点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

$$\text{证 由 } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

知 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ 及 $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1).$$

其模 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. 其方向余弦分别为

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

方向角分别为 $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos \alpha = 0$; (2) $\cos \beta = 1$; (3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 由 $\cos \alpha = 0$ 知 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 故向量与 x 轴垂直, 平行于 yOz 面.

(2) 由 $\cos \beta = 1$ 知 $\beta = 0$, 故向量与 y 轴同向, 垂直于 xOz 面.

(3) 由 $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ 知 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, 故向量垂直于 x 轴和 y 轴, 即与 z 轴平行, 垂直于 xOy 面.

17. 设向量 r 的模是 4, 它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$, 求 r 在 u 轴上的投影.

解 已知 $|r| = 4$, 则 $\text{Prj}_u r = |r| \cos \theta = 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解 设 A 点坐标为 (x, y, z) , 则

$$\overrightarrow{AB} = (2-x, -1-y, 7-z),$$

由题意知

$$2-x=4, \quad -1-y=-4, \quad 7-z=7,$$

故 $x=-2, y=3, z=0$, 因此 A 点坐标为 $(-2, 3, 0)$.

19. 设 $m=3i+5j+8k, n=2i-4j-7k$ 和 $p=5i+j-4k$. 求向量 $a=4m+3n-p$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

$$\begin{aligned} \text{解 } a &= 4m+3n-p = 4(3i+5j+8k) + 3(2i-4j-7k) - (5i+j-4k) \\ &= 13i+7j+15k, \end{aligned}$$

a 在 x 轴上的投影为 13, 在 y 轴上的分向量为 $7j$.

习题 8-2

数量积 向量积 * 混合积

1. 设 $a=3i-j-2k, b=i+2j-k$, 求

(1) $a \cdot b$ 及 $a \times b$; (2) $(-2a) \cdot 3b$ 及 $a \times 2b$; (3) a, b 的夹角的余弦.

解 (1) $a \cdot b = (3, -1, -2) \cdot (1, 2, -1)$

$$= 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3,$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (5, 1, 7).$$

$$(2) (-2a) \cdot 3b = -6(a \cdot b) = -6 \times 3 = -18,$$

$$a \times 2b = 2(a \times b) = 2(5, 1, 7) = (10, 2, 14).$$

$$(3) \cos(\widehat{a, b}) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \\ = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 a, b, c 为单位向量, 且满足 $a + b + c = 0$, 求 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

解 已知 $|a| = |b| = |c| = 1, a + b + c = 0$, 故 $(a + b + c) \cdot (a + b + c) = 0$.

即 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a = 0$. 因此

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) = -\frac{3}{2}.$$

3. 已知 $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = (3-1, 3-(-1), 1-2) = (2, 4, -1),$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = (3-3, 1-3, 3-1) = (0, -2, 2),$$

由于 $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直, 故所求向量可取为

$$a = \frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}|},$$

$$\text{由 } \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\text{知 } a = \frac{\pm 1}{2\sqrt{17}}(6, -4, -4) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3, 1, 8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1, 4, 2)$, 计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m, 重力方向为 z 轴负方向).

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = (1-3, 4-1, 2-8) = (-2, 3, -6),$$

$$F = (0, 0, -100 \times 9.8) = (0, 0, -980),$$

$$W = F \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (0, 0, -980) \cdot (-2, 3, -6) = 5880(\text{J}).$$

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 F_1 作用着; 在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 F_2 作用着(图 8-6). 问 $\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, |F_1|, |F_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持

平衡?

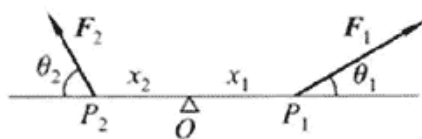


图 8-6

解 如图 8-6, 已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零, 又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|F_1| x_1 \sin \theta_1 - |F_2| x_2 \sin \theta_2 = 0,$$

即

$$|F_1| x_1 \sin \theta_1 = |F_2| x_2 \sin \theta_2.$$

例 6. 求向量 $a = (4, -3, 4)$ 在向量 $b = (2, 2, 1)$ 上的投影.

$$\text{解 } \text{Prj}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{(4, -3, 4) \cdot (2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

例 7. 设 $a = (3, 5, -2)$, $b = (2, 1, 4)$, 问 λ 与 μ 有怎样的关系, 能使得 $\lambda a + \mu b$ 与 z 轴垂直?

$$\text{解 } \lambda a + \mu b = \lambda(3, 5, -2) + \mu(2, 1, 4) = (3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu).$$

要 $\lambda a + \mu b$ 与 z 轴垂直, 即要 $(\lambda a + \mu b) \perp (0, 0, 1)$, 即

$$(\lambda a + \mu b) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

亦即

$$(3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

故 $-2\lambda + 4\mu = 0$, 因此当 $\lambda = 2\mu$ 时能使 $\lambda a + \mu b$ 与 z 轴垂直.

例 8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证 如图 8-7, 设 AB 是圆 O 的直径, C 点在圆周上, 要证 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$. 只要证

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 即可. 由

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= -|\overrightarrow{AO}|^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 = 0, \end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$, $\angle ACB$ 为直角.

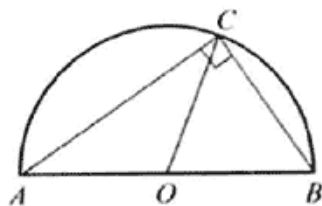


图 8-7

例 9. 已知向量 $a = 2i - 3j + k$, $b = i - j + 3k$ 和 $c = i - 2j$, 计算:

$$(1) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}; \quad (2) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}); \quad (3) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

解 (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2, -3, 1) \cdot (1, -1, 3) = 8, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (2, -3, 1) \cdot (1, -2, 0) = 8,$
 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = 8(1, -2, 0) - 8(1, -1, 3) = (0, -8, -24)$
 $= -8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}.$

(2) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, -3, 1) + (1, -1, 3) = (3, -4, 4),$
 $\mathbf{b} + \mathbf{c} = (1, -1, 3) + (1, -2, 0) = (2, -3, 3),$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0, -1, -1) = -\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

(3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$

10. 已知 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

解 由向量积的几何意义知

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|,$$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3, -3, 1),$$

$$|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1} = \sqrt{19}.$$

故

$$S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

* 11. 已知 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 试利用行列式的性质证明:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

证 因为 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

而由行列式的性质知 $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$ 故

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

证 设向量 $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$. 由 $a \cdot b = |a| |b| \cos(\widehat{a, b})$ 知,

$$|a \cdot b| = |a| |b| |\cos(\widehat{a, b})| \leq |a| |b|, \text{ 从而}$$

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

当 a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3 成比例, 即 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ 时, 上述等式成立.

习题 8-3

平面及其方程

1. 求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.

解 所求平面与已知平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行. 因此所求平面的法向量可取为 $n = (3, -7, 5)$, 设所求平面为

$$3x - 7y + 5z + D = 0.$$

将点 $(3, 0, -1)$ 代入上式得 $D = -4$. 故所求平面方程为

$$3x - 7y + 5z - 4 = 0.$$

2. 求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 $\overrightarrow{OM_0} = (2, 9, -6)$. 所求平面与 $\overrightarrow{OM_0}$ 垂直, 可取 $n = \overrightarrow{OM_0}$, 设所求平面方程为

$$2x + 9y - 6z + D = 0.$$

将点 $M_0(2, 9, -6)$ 代入上式, 得 $D = -121$. 故所求平面方程为

$$2x + 9y - 6z - 121 = 0.$$

3. 求过 $(1, 1, -1), (-2, -2, 2)$ 和 $(1, -1, 2)$ 三点的平面方程.

$$\text{解 由 } \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } x-3y-2z=0, \text{ 即为所求平面方程.}$$

注 设 $M(x, y, z)$ 为平面上任一点, $M_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, 3)$ 为平面上已知点. 由 $\overrightarrow{M_1M} \cdot (\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

它就表示过已知三点 $M_i (i=1, 2, 3)$ 的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:

(1) $x=0$;

(2) $3y-1=0$;

(3) $2x - 3y - 6 = 0$;

(4) $x - \sqrt{3}y = 0$;

(5) $y + z = 1$;

(6) $x - 2z = 0$;

(7) $6x + 5y - z = 0$.

解 (1)~(7)的平面分别如图 8-8(a)~(g).

(1) $x = 0$ 表示 yOz 坐标面.

(2) $3y - 1 = 0$ 表示过点 $(0, \frac{1}{3}, 0)$ 且与 y 轴垂直的平面.

(3) $2x - 3y - 6 = 0$ 表示与 z 轴平行的平面.

(4) $x - \sqrt{3}y = 0$ 表示过 z 轴的平面.

(5) $y + z = 1$ 表示平行于 x 轴的平面.

(6) $x - 2z = 0$ 表示过 y 轴的平面.

(7) $6x + 5y - z = 0$ 表示过原点的平面.

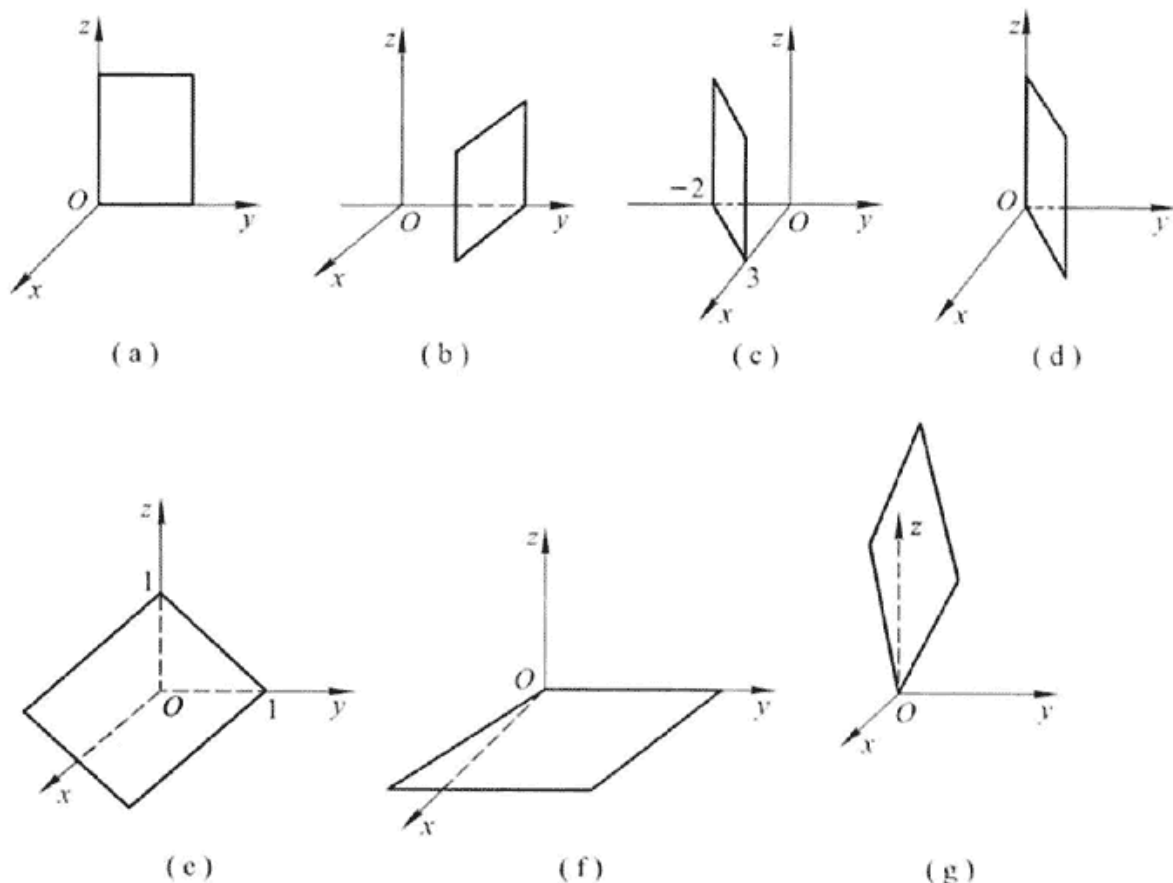


图 8-8

5. 求平面 $2x - 2y + z + 5 = 0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解 平面的法向量为 $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$. 设平面与三个坐标面 xOy, yOz, zOx 的夹角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. 则根据平面的方向余弦知

$$\cos \theta_1 = \cos \gamma = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{k}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{1}{3},$$

$$\cos \theta_2 = \cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{i}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3},$$

$$\cos \theta_3 = \cos \beta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{j}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 1, 0)}{3 \cdot 1} = -\frac{2}{3}.$$

例 6. 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ 和 $\mathbf{b} = (1, -1, 0)$, 试求这平面方程.

解 所求平面平行于向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 可取平面的法向量

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3),$$

故所求平面为 $1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) - 3 \cdot (z+1) = 0$, 即

$$x + y - 3z - 4 = 0.$$

例 7. 求三平面 $x + 3y + z = 1$, $2x - y - z = 0$, $-x + 2y + 2z = 3$ 的交点.

解 联立三平面方程

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1, \\ 2x - y - z = 0, \\ -x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

解此方程组得 $x = 1, y = -1, z = 3$. 故所求交点为 $(1, -1, 3)$.

例 8. 分别按下列条件求平面方程:

- (1) 平行于 xOz 面且经过点 $(2, -5, 3)$;
- (2) 通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$;
- (3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$.

解 (1) 所求平面平行于 xOz 面, 故设所求平面方程为 $By + D = 0$. 将点 $(2, -5, 3)$ 代入, 得

$$-5B + D = 0, \quad \text{即} \quad D = 5B.$$

因此, 所求平面方程为

$$By + 5B = 0, \quad \text{即} \quad y + 5 = 0.$$

(2) 所求平面过 z 轴, 故设所求平面方程为 $Ax + By = 0$. 将点 $(-3, 1, -2)$ 代入, 得

$$-3A + B = 0, \quad \text{即} \quad B = 3A.$$

因此, 所求平面方程为

$$Ax + 3Ay = 0, \quad \text{即} \quad x + 3y = 0.$$

(3) 所求平面平行于 x 轴, 故设所求平面方程为 $By + Cz + D = 0$. 将点 $(4, 0, -2)$ 及 $(5, 1, 7)$ 分别代入方程得

$$-2C + D = 0 \quad \text{及} \quad B + 7C + D = 0.$$

从而解得

$$C = \frac{D}{2}, \quad B = -\frac{9}{2}D.$$

因此,所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy + \frac{D}{2}z + D = 0,$$

即

$$9y - z - 2 = 0.$$

9. 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离.

解 利用点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1. \end{aligned}$$

习题 8-4

空间直线及其方程

1. 求过点 $(4, -1, 3)$ 且平行于直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$ 的直线方程.

解 所求直线与已知直线平行, 故所求直线的方向向量 $s = (2, 1, 5)$, 直线方程即为

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点 $M_1(3, -2, 1)$ 和 $M_2(-1, 0, 2)$ 的直线方程.

解 取所求直线的方向向量

$$s = \overrightarrow{M_1M_2} = (-1-3, 0-(-2), 2-1) = (-4, 2, 1),$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

解 根据题意可知已知直线的方向向量

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 3).$$

取 $x = 0$, 代入直线方程得 $\begin{cases} -y + z = 1, \\ y + z = 4. \end{cases}$ 解得 $y = \frac{3}{2}, z = \frac{5}{2}$. 这样就得到直线经过

的一点 $(0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1} = \frac{z-\frac{5}{2}}{3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = -2t, \\ y = \frac{3}{2} + t, \\ z = \frac{5}{2} + 3t. \end{cases}$$

注 由于所取的直线上的点可以不同,因此所得到的直线对称式方程或参数方程的表达式也可以是不同的.

例 4. 求过点(2,0,-3)且与直线

$$\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

解 根据题意,所求平面的法向量可取已知直线的方向向量,即

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 14, 11),$$

故所求平面方程为 $-16(x-2) + 14(y-0) + 11(z+3) = 0$. 即

$$16x - 14y - 11z - 65 = 0.$$

例 5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦.

解 两已知直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 4, -1), \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (10, -5, 10),$$

因此,两直线的夹角的余弦

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2}) = \frac{\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1| |\boldsymbol{s}_2|} \\ &= \frac{3 \times 10 - 4 \times 5 - 1 \times 10}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2}} = 0. \end{aligned}$$

例 6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

证 已知直线的方向向量分别是

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 1, 5), \quad s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-9, -3, -15),$$

由 $s_2 = -3s_1$ 知两直线互相平行.

7. 求过点 $(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 平行的直线方程.

解 所求直线与已知的两个平面平行, 因此所求直线的方向向量可取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 3, 1),$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}.$$

注 本题也可以这样解: 由于所求直线与已知的两个平面平行, 则可视所求直线是分别与已知平面平行的两平面的交线. 不妨设所求直线为

$$\begin{cases} x + 2z = a, \\ y - 3z = b. \end{cases}$$

将点 $(0, 2, 4)$ 代入上式, 得 $a = 8, b = -10$. 故所求直线为

$$\begin{cases} x + 2z = 8, \\ y - 3z = -10. \end{cases}$$

8. 求过点 $(3, 1, -2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

解 利用平面束方程, 过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5} - \frac{y+3}{2} + \lambda \left(\frac{y+3}{2} - z \right) = 0,$$

将点 $(3, 1, -2)$ 代入上式得 $\lambda = \frac{11}{20}$. 因此所求平面方程为

$$\frac{x-4}{5} - \frac{y+3}{2} + \frac{11}{20} \left(\frac{y+3}{2} - z \right) = 0,$$

即

$$8x - 9y - 22z - 59 = 0.$$

9. 求直线 $\begin{cases} x + y + 3z = 0, \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ 与平面 $x - y - z + 1 = 0$ 的夹角.

解 已知直线的方向向量 $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 4, -2)$, 平面的法向量 $n =$

$(1, -1, -1)$.

设直线与平面的夹角为 φ , 则

$$\sin \varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}})| = \frac{|\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}| |\boldsymbol{n}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = 0,$$

即 $\varphi = 0$.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

$$(1) \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3} \text{ 和 } 4x - 2y - 2z = 3;$$

$$(2) \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7} \text{ 和 } 3x - 2y + 7z = 8;$$

$$(3) \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4} \text{ 和 } x + y + z = 3.$$

解 设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 直线与平面的夹角为 φ , 且

$$\sin \varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}})| = \frac{|\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}| |\boldsymbol{n}|}.$$

$$(1) \boldsymbol{s} = (-2, -7, 3), \boldsymbol{n} = (4, -2, -2),$$

$$\sin \varphi = \frac{|(-2) \cdot 4 + (-7) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 0,$$

即 $\varphi = 0$. 故直线平行于平面或在平面上, 现将直线上的点 $A(-3, -4, 0)$ 代入平面方程, 方程不成立. 故点 A 不在平面上, 因此直线不在平面上, 直线与平面平行.

$$(2) \boldsymbol{s} = (3, -2, 7), \boldsymbol{n} = (3, -2, 7), \text{ 由于 } \boldsymbol{s} = \boldsymbol{n} \text{ 或}$$

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 7 \cdot 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2}} = 1,$$

知 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 故直线与平面垂直.

$$(3) \boldsymbol{s} = (3, 1, -4), \boldsymbol{n} = (1, 1, 1), \text{ 由于 } \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ 或}$$

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 0,$$

知 $\varphi = 0$, 将直线上的点 $A(2, -2, 3)$ 代入平面方程, 方程成立, 即点 A 在平面上. 故直线在平面上.

11. 求过点 $(1, 2, 1)$ 而与两直线

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3), \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1),$$

取
$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1),$$

则过点 $(1, 2, 1)$, 以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面方程为

$$-1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) - 1 \cdot (z-1) = 0,$$

即
$$x - y + z = 0.$$

12. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影.

解 作过已知点且与已知平面垂直的直线. 该直线与平面的交点即为所求. 根据题意, 过点 $(-1, 2, 0)$ 与平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 垂直的直线为

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{-1},$$

将它化为参数方程 $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = -t$, 代入平面方程得

$$-1 + t + 2(2 + 2t) - (-t) + 1 = 0,$$

整理得 $t = -\frac{2}{3}$. 从而所求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影

为 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

13. 求点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 的距离.

解 直线的方向向量 $\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3).$

在直线上取点 $(1, -2, 0)$, 这样, 直线的方程可表示成参数方程形式

$$x = 1, \quad y = -2 - 3t, \quad z = -3t. \quad (1)$$

又, 过点 $P(3, -1, 2)$, 以 $\boldsymbol{s} = (0, -3, -3)$ 为法向量的平面方程为

$$-3(y+1) - 3(z-2) = 0,$$

即
$$y + z - 1 = 0. \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得 $t = -\frac{1}{2}$, 于是直线与平面的交点为 $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 故所求距离为

$$d = \sqrt{(3-1)^2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

14. 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 试证: 点 M_0 到直线 L 的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

证 如图 8-9, 点 M_0 到直线 L 的距离为 d . 由向量积的几何意义知 $|\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|$ 表示以 $\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{s}$ 为邻边的平行四边形的面积. 而 $\frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}$ 表示以 $|\mathbf{s}|$ 为边长的该平行四边形的高, 即为点 M_0 到直线 L 的距离. 于是

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

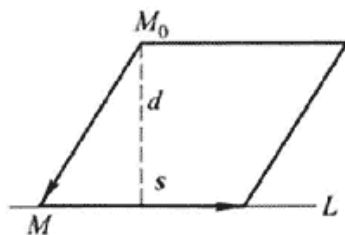


图 8-9

15. 求直线 $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$ 在平面 $4x - y + z = 1$ 上的投影直线的方程.

解 作过已知直线的平面束, 在该平面束中找出与已知平面垂直的平面, 该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线 $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$2x - 4y + z + \lambda(3x - y - 2z - 9) = 0,$$

经整理得 $(2 + 3\lambda)x + (-4 - \lambda)y + (1 - 2\lambda)z - 9\lambda = 0$.

由 $(2 + 3\lambda) \cdot 4 + (-4 - \lambda) \cdot (-1) + (1 - 2\lambda) \cdot 1 = 0$,

得 $\lambda = -\frac{13}{11}$. 代入平面束方程, 得

$$17x + 31y - 37z - 117 = 0.$$

因此所求投影直线的方程为

$$\begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0, \\ 4x - y + z = 1. \end{cases}$$

16. 画出下列各平面所围成的立体的图形:

(1) $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1, 3x + 4y + 2z - 12 = 0$;

(2) $x = 0, z = 0, x = 1, y = 2, z = \frac{y}{4}$.

解 (1) 如图 8-10(a); (2) 如图 8-10(b).

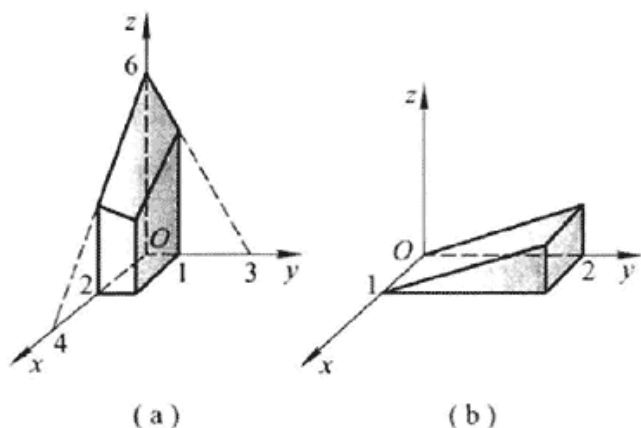


图 8-10

习题 8-5

曲面及其方程

1. 一球面过原点及 $A(4,0,0)$, $B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$ 三点, 求球面的方程及球心的坐标和半径.

解 设所求球面的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 将已知点的坐标代入上式, 得

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2, \quad (1)$$

$$(a-4)^2 + b^2 + c^2 = R^2, \quad (2)$$

$$(a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 = R^2, \quad (3)$$

$$a^2 + b^2 + (4+c)^2 = R^2. \quad (4)$$

联立(1)(2)得 $a=2$, 联立(1)(4)得 $c=-2$, 将 $a=2$ 代入(2)(3)并联合立得 $b=1$, 故 $R=3$. 因此所求球面方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$, 其中球心坐标为 $(2, 1, -2)$, 半径为 3.

2. 建立以点 $(1, 3, -2)$ 为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解 设以点 $(1, 3, -2)$ 为球心, R 为半径的球面方程为

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = R^2.$$

球面过原点, 故

$$R^2 = (0-1)^2 + (0-3)^2 + (0+2)^2 = 14.$$

从而所求球面方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 14$.

3. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$ 表示什么曲面?

解 将已知方程整理成

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{6})^2.$$

所以此方程表示以 $(1, -2, -1)$ 为球心, 以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点 $(2, 3, 4)$ 的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面的方

程,它表示怎样的曲面?

解 设动点坐标为 (x, y, z) ,根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2}} = \frac{1}{2},$$

化简整理得

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2.$$

它表示以 $\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right)$ 为球心,以 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

例 5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ 代替抛物线方程 $z^2 = 5x$ 中的 z ,得

$$(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 5x,$$

即

$$y^2 + z^2 = 5x.$$

注 xOz 面上的曲线 $F(x, z) = 0$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

例 6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2 + z^2 = 9$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 代替圆方程 $x^2 + z^2 = 9$ 中的 x ,得

$$(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 9,$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

例 7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 中的 y ,得该双曲线绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4x^2 - 9(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 36,$$

即

$$4x^2 - 9(y^2 + z^2) = 36.$$

以 $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 中的 x ,得该双曲线绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 - 9y^2 = 36,$$

即

$$4(x^2 + z^2) - 9y^2 = 36.$$

例 8. 画出下列各方程所表示的曲面:

$$(1) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2; \quad (2) -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$(3) \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1; \quad (4) y^2 - z = 0; \quad (5) z = 2 - x^2.$$

- 解 (1) 如图 8-11(a); (2) 如图 8-11(b); (3) 如图 8-11(c);
 (4) 如图 8-11(d); (5) 如图 8-11(e).

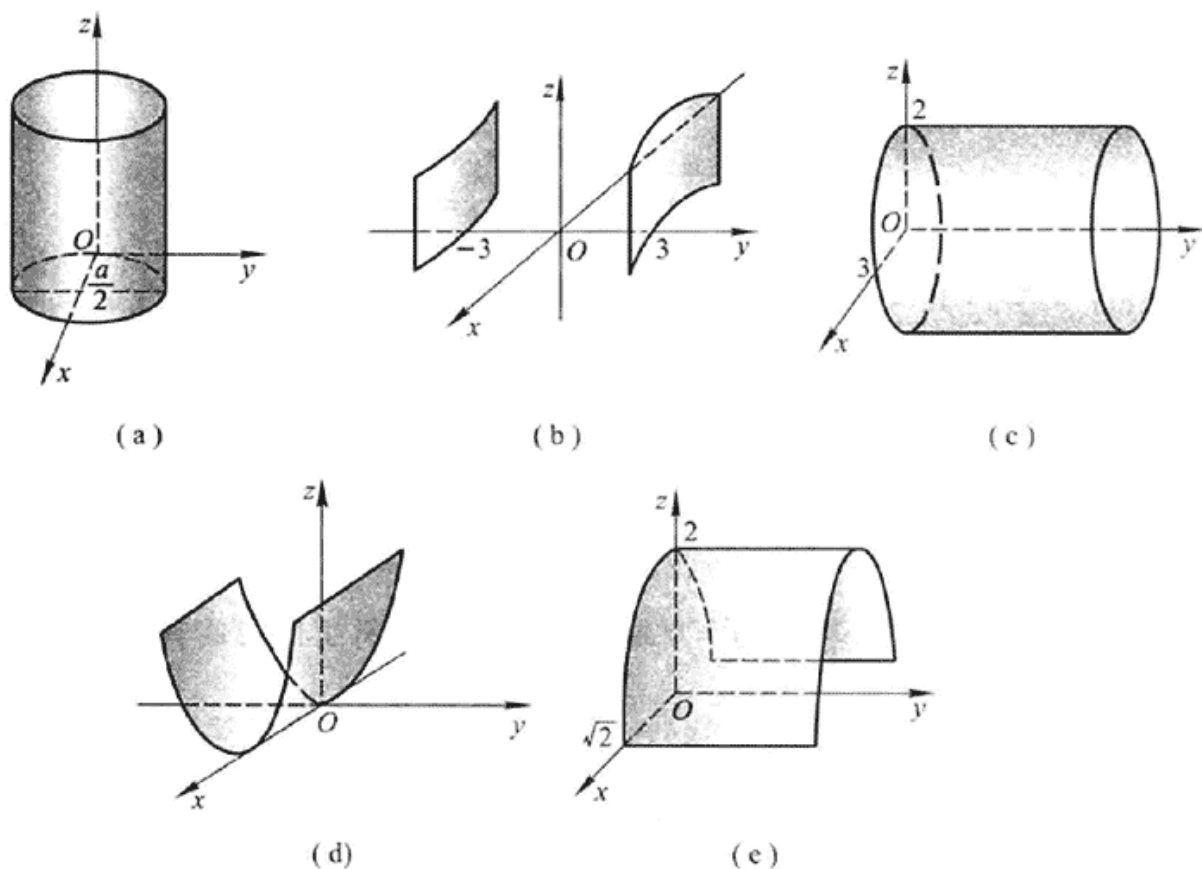


图 8-11

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

- (1) $x=2$; (2) $y=x+1$;
 (3) $x^2+y^2=4$; (4) $x^2-y^2=1$.

解 (1) $x=2$ 在平面解析几何中表示平行于 y 轴的一条直线, 在空间解析几何中表示与 yOz 面平行的平面.

(2) $y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1, y 轴截距也为 1 的一条直线, 在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点, 半径为 2 的圆, 在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴, 准线为 $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases}$ 的圆柱面.

(4) $x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴, y 轴为虚轴的双曲线, 在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴, 准线为 $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$; (2) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$;

(3) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$;

(4) $(z - a)^2 = x^2 + y^2$.

解 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ 表示 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(2) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示 yOz 面上双曲线 $-\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(3) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示 xOz 面上双曲线 $x^2 - z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(4) $(z - a)^2 = x^2 + y^2$ 表示 xOz 面上直线 $z = x + a$ 或 $z = -x + a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示 yOz 面上的直线 $z = y + a$ 或 $z = -y + a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

11. 画出下列方程所表示的曲面:

(1) $4x^2 + y^2 - z^2 = 4$; (2) $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$; (3) $\frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

解 (1) 如图 8-12(a); (2) 如图 8-12(b); (3) 如图 8-12(c).

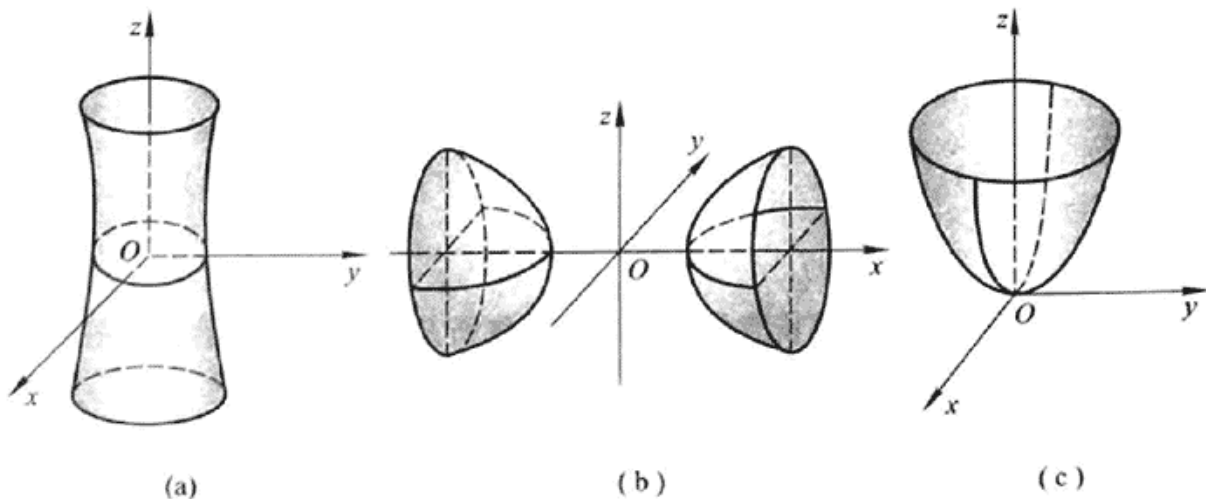


图 8-12

12. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) $z = 0, z = 3, x - y = 0, x - \sqrt{3}y = 0, x^2 + y^2 = 1$ (在第一卦限内);

(2) $x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2$ (在第一卦限内).

解 (1) 如图 8-13 所示; (2) 如图 8-14 所示.

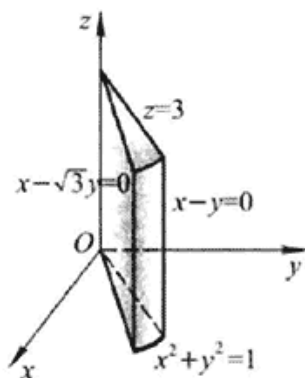


图 8-13

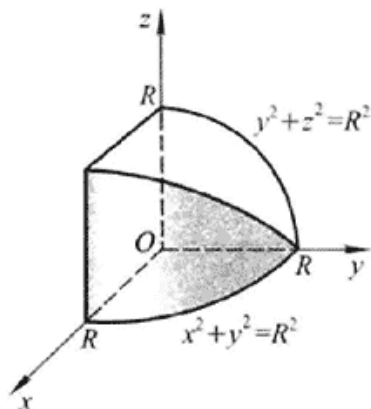


图 8-14

习题 8-6

空间曲线及其方程

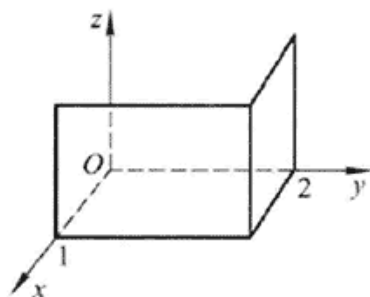
1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

$$(1) \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$$

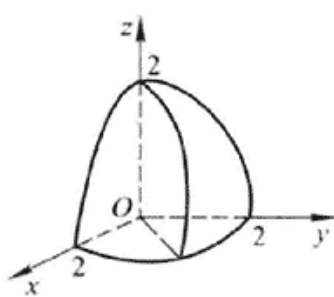
$$(2) \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

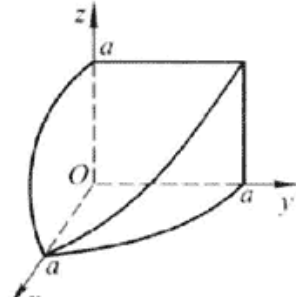
解 (1) 如图 8-15(a); (2) 如图 8-15(b); (3) 如图 8-15(c).



(a)



(b)



(c)

图 8-15

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

$$(1) \begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3. \end{cases}$$

解 (1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示两直线的交点, 在空间解析几何中表示两平面的交线, 即空间直线.

(2) $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与其切线 $y=3$ 的交

点,即切点.在空间解析几何中表示椭圆柱面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与其切平面 $y=3$ 的交线,即空间直线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解 在 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 中消去 x ,得

$$3y^2 - z^2 = 16,$$

即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 中消去 y ,得

$$3x^2 + 2z^2 = 16,$$

即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解 在 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + z = 1 \end{cases}$ 中消去 z ,得

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 9, \quad \text{即} \quad 2x^2 - 2x + y^2 = 8,$$

它表示母线平行于 z 轴的柱面,故 $\begin{cases} 2x^2 - 2x + y^2 = 8, \\ z = 0 \end{cases}$ 表示已知交线在 xOy 面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

解 (1) 将 $y=x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,得

$$2x^2 + z^2 = 9,$$

取 $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t$,则 $z = 3 \sin t$,从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ z = 3 \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

(2) 将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$,得

$$(x-1)^2 + y^2 = 3,$$

取 $x-1 = \sqrt{3} \cos t$,则 $y = \sqrt{3} \sin t$,从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sqrt{3} \sin t, \\ z = 0 \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

6. 求螺旋线 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 由 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$ 得 $x^2 + y^2 = a^2$, 故该螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$

由 $y = a \sin \theta, z = b\theta$ 得 $y = a \sin \frac{z}{b}$, 故该螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为 $\begin{cases} y = a \sin \frac{z}{b}, \\ x = 0. \end{cases}$

由 $x = a \cos \theta, z = b\theta$ 得 $x = a \cos \frac{z}{b}$, 故该螺旋线在 xOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为 $\begin{cases} x = a \cos \frac{z}{b}, \\ y = 0. \end{cases}$

7. 求上半球 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$) 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

解 如图 8-16. 所求立体在 xOy 面上的投影即为 $x^2 + y^2 \leq ax$, 而由

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

得 $z = \sqrt{a^2 - ax}$. 故所求立体在 xOz 面上的投影为由 x 轴, z 轴及曲线 $z = \sqrt{a^2 - ax}$ 所围成的区域.

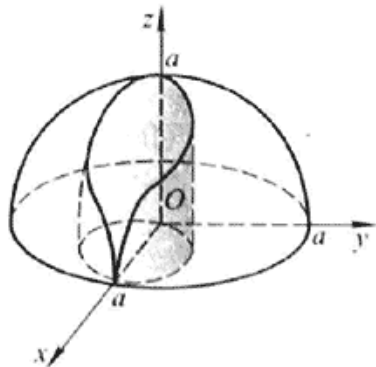


图 8-16

8. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 4$) 在三坐标面上的投影.

解 联立 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 4 \end{cases}$, 得 $x^2 + y^2 = 4$. 故旋转抛物面在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

如图 8-17.

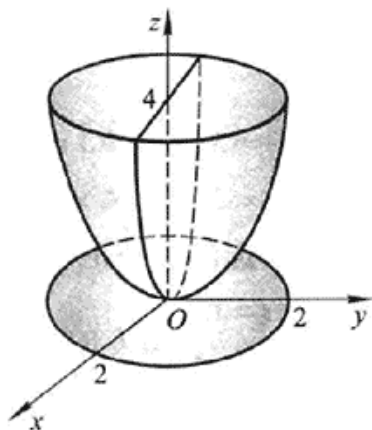


图 8-17

联立 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x = 0 \end{cases}$, 得 $z = y^2$, 故旋转抛物面在 yOz 面上的投影为由 $z = y^2$ 及 $z = 4$

所围成的区域.

同理, 联立 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = 0 \end{cases}$, 得 $z = x^2$. 故旋转抛物面在 xOz 面上的投影为由 $z = x^2$ 及

$z = 4$ 所围成的区域.

总习题八

1. 填空:

(1) 设在坐标系 $[O; i, j, k]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z) , 则在 $[A; i, j, k]$ 坐标系中, 点 M 的坐标为 _____, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为 _____;

(2) 设数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为 0, 使 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个向量是 _____ 的;

(3) 设 $\mathbf{a} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (4, -1, 10)$, $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $\lambda =$ _____;

(4) 设 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{c}| = 5$, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| =$ _____.

解 (1) 点 M 的坐标为 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为 $(x - x_0 +$

$$x_0, y - y_0 + y_0, z - z_0 + z_0) = (x, y, z).$$

(2) 由 $[(\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}) \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = 0$ 得 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$, 即 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面.

(3) $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a} = (4, -1, 10) - \lambda(2, 1, 2) = (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda)$.

$\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 故 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (2, 1, 2) \cdot (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda) = 27 - 9\lambda = 0$, 从而 $\lambda = 3$.

(4) 由 $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 知 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$;

由 $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ 知 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

又, 由 $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2$ 知以向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为边的三角形为直角三角形, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. 故

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| &= 3 |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 3 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \\ &= 3 \times 3 \times 4 \times 1 = 36. \end{aligned}$$

2. 下列两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设直线 L 的方程为 $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4, \end{cases}$ 则 L 的参数方程为();

$$(A) \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (B) \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (C) \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (D) \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

(2) 下列结论中, 错误的是().

(A) $z + 2x^2 + y^2 = 0$ 表示椭圆抛物面

(B) $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示双叶双曲面

(C) $x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$ 表示圆锥面

(D) $y^2 = 5x$ 表示抛物柱面

解 (1) 应选(A). 直线 L 的方向向量为 $\mathbf{s} = (-2, 1, 3)$, 过点 $(1, 1, 1)$.

(2) 应选(B). $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示单叶双曲面.

3. 在 y 轴上求与点 $A(1, -3, 7)$ 和点 $B(5, 7, -5)$ 等距离的点.

解 根据题意, 设所求点为 $M(0, y, 0)$, 由

$$1^2 + (y + 3)^2 + 7^2 = 5^2 + (y - 7)^2 + (-5)^2,$$

得 $y = 2$. 故所求点为 $M(0, 2, 0)$.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 2, -1)$, $B(5, -4, 7)$ 和 $C(-1, 1, 2)$, 求从顶点 C 所引中线的长度.

解 设 AB 中点的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 由

$$x_0 = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y_0 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad z_0 = \frac{7-1}{2} = 3,$$

从而顶点 C 所引中线的长度

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{30}.$$

5. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, 三边中点依次为 D, E, F , 试用向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

表示 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$, 并证明

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}.$$

证 如图 8-18, D, E, F 分别为 BC, CA, AB 的中点, 因此

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\mathbf{a}}{2}, \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{\mathbf{b}}{2}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{c}}{2},$$

从而

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2},$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2} + \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2} = \frac{3}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}.$$

6. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边, 且其长度等于第三边长度的一半.

证 如图 8-19, D, E 分别是 CA 与 BC 的中点.

由 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) = 2\overrightarrow{DE}$ 知

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE} \quad \text{且} \quad |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.$$

即三角形两边中点的连线平行于第三边, 且长度等于第三边长度的一半.

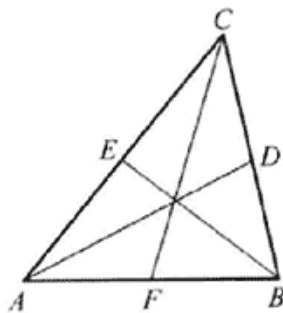


图 8-18

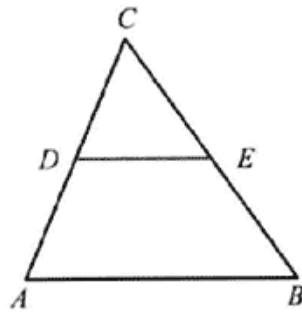


图 8-19

7. 设 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, z)$, 求 z .

解 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3 - 1, -5 + 1, 8 + z) = (2, -4, 8 + z),$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (3 - (-1), -5 - 1, 8 - z) = (4, -6, 8 - z),$

由 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 知

$$\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (8 + z)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + (8 - z)^2},$$

经整理得 $z = 1$.

8. 设 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$, 求向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角.

解 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$

$$= (\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 4 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7,$$

$$|a-b|^2 = (a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\widehat{a,b})$$

$$= (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = |a|^2 - |b|^2 = 3 - 1 = 2,$$

故

$$\cos(\widehat{a+b, a-b}) = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b||a-b|} = \frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\text{所以 } (\widehat{a+b, a-b}) = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

9. 设 $a+3b \perp 7a-5b$, $a-4b \perp 7a-2b$, 求 $(\widehat{a,b})$.

解 由 $a+3b \perp 7a-5b$ 知 $(a+3b) \cdot (7a-5b) = 0$, 由 $a-4b \perp 7a-2b$ 知 $(a-4b) \cdot (7a-2b) = 0$, 故

$$7|a|^2 + 16a \cdot b - 15|b|^2 = 0, \quad (1)$$

$$7|a|^2 - 30a \cdot b + 8|b|^2 = 0. \quad (2)$$

两式相减得 $46a \cdot b = 23|b|^2$, 即 $a \cdot b = \frac{1}{2}|b|^2$, 代入(1)式得

$$|a| = |b|,$$

从而

$$\cos(\widehat{a,b}) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$(\widehat{a,b}) = \frac{\pi}{3}.$$

10. 设 $a = (2, -1, -2)$, $b = (1, 1, z)$, 问 z 为何值时 $(\widehat{a,b})$ 最小? 并求出此最小值.

$$\begin{aligned} \text{解 } \cos(\widehat{a,b}) &= \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{(2, -1, -2) \cdot (1, 1, z)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + z^2}} \\ &= \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}. \end{aligned}$$

设 $f(z) = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$, 则

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-2\sqrt{2+z^2} - (1-2z)\frac{z}{\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

令 $f'(z) = 0$ 得 $z = -4$.

由于 $0 \leq (\widehat{a, b}) \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos(\widehat{a, b})$ 为单调减少函数. $f(z)$ 取得最大值时,

$\theta = (\widehat{a, b})$ 达到最小值.

经验证 $z = -4$ 时, $f(z)$ 达到最大值, 此时 $\theta = (\widehat{a, b})$ 达到最小值且由

$$\cos(\widehat{a, b})_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 知 } \theta_{\min} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

 11. 设 $|a| = 4$, $|b| = 3$, $(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{6}$, 求以 $a + 2b$ 和 $a - 3b$ 为边的平行四边形的面积.

解 根据向量积的几何意义知以 $a + 2b$ 和 $a - 3b$ 为边的平行四边形的面积

$$\begin{aligned}
 S &= |(a + 2b) \times (a - 3b)| \\
 &= 5 |a \times b| = 5 |a| |b| \sin(\widehat{a, b}) \\
 &= 5 \times 4 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{6} = 5 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 30.
 \end{aligned}$$

 12. 设 $a = (2, -3, 1)$, $b = (1, -2, 3)$, $c = (2, 1, 2)$, 向量 r 满足 $r \perp a$, $r \perp b$, $\text{Prj}_c r = 14$, 求 r .

解 设向量 $r = (x, y, z)$.

由 $r \perp a$ 知 $r \cdot a = 0$, 即

$$2x - 3y + z = 0.$$

由 $r \perp b$ 知 $r \cdot b = 0$, 即

$$x - 2y + 3z = 0.$$

由 $\text{Prj}_c r = \frac{r \cdot c}{|c|} = 14$ 知

$$2x + y + 2z = 14 |c| = 14 \times 3 = 42.$$

联立上述三个方程得 $x = 14$, $y = 10$, $z = 2$. 故 $r = (14, 10, 2)$.

 13. 设 $a = (-1, 3, 2)$, $b = (2, -3, -4)$, $c = (-3, 12, 6)$, 证明三向量 a, b, c 共面, 并用 a 和 b 表示 c .

$$\text{证 由 } (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ 知 } [a \ b \ c] = 0, \text{ 故三个向量 } a, b, c$$

共面.

设 $c = \lambda a + \mu b$, 则

$$\begin{aligned} (-3, 12, 6) &= \lambda(-1, 3, 2) + \mu(2, -3, -4) \\ &= (-\lambda + 2\mu, 3\lambda - 3\mu, 2\lambda - 4\mu), \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = -3, \\ 3\lambda - 3\mu = 12, \\ 2\lambda - 4\mu = 6, \end{cases}$$

解得 $\lambda = 5, \mu = 1$. 故

$$c = 5a + b.$$

 14. 已知动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹的方程.

解 根据题意知

$$|z| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2},$$

即 $(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4(z-1) = 0$ 为点 M 的轨迹的方程.

 15. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

$$\begin{aligned} (1) \quad z &= 2(x^2 + y^2); & (2) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} &= 1; \\ (3) \quad z^2 &= 3(x^2 + y^2); & (4) \quad x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

解 (1) 母线为 $\begin{cases} x=0, \\ z=2y^2, \end{cases}$ 旋转轴为 z 轴.

(2) 母线为 $\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \end{cases}$ 旋转轴为 y 轴.

(3) 母线为 $\begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases}$ 旋转轴为 z 轴.

(4) 母线为 $\begin{cases} z=0, \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$ 旋转轴为 x 轴.

 16. 求通过点 $A(3, 0, 0)$ 和 $B(0, 0, 1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

解 设所求平面方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

平面过点 $A(3, 0, 0), B(0, 0, 1)$, 故 $a=3, c=1$. 这样平面方程为

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + z = 1.$$

它与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 故

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{b}, 1\right) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1^2} \cdot 1},$$

即
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1 = 4, \quad \frac{1}{b} = \pm \frac{\sqrt{26}}{3},$$

故所求平面为

$$x + \sqrt{26}y + 3z = 3 \quad \text{或} \quad x - \sqrt{26}y + 3z = 3.$$

17. 设一平面垂直于平面 $z=0$, 并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线,

求此平面的方程.

解 直线 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的方向向量

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, -1).$$

作过点 $(1, -1, 1)$ 且以 $s = (0, -1, -1)$ 为法向量的平面:

$$-1 \cdot (y+1) - (z-1) = 0, \quad \text{即} \quad y+z=0,$$

联立 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \\ y+z=0 \end{cases}$ 得垂足 $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

所求平面垂直于平面 $z=0$, 设平面方程为 $Ax + By + D = 0$. 平面过点 $(1, -1, 1)$ 及垂足 $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 故有

$$\begin{cases} A - B + D = 0, \\ -\frac{1}{2}B + D = 0, \end{cases}$$

由此解得 $B = 2D, A = D$. 因此所求平面方程为 $Dx + 2Dy + D = 0$, 即

$$x + 2y + 1 = 0.$$

18. 求过点 $(-1, 0, 4)$, 且平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$

相交的直线的方程.

解 设所求直线方程为

$$\frac{x+1}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-4}{p}.$$

所求直线平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 故有

$$3m - 4n + p = 0, \quad (1)$$

又所求直线与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交, 故有

$$\begin{vmatrix} -1 - (-1) & 3 - 0 & 0 - 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{即} \quad 10m - 4n - 3p = 0. \quad (2)$$

联立(1)(2)式可得

$$\frac{16}{m} = \frac{19}{n} = \frac{28}{p}.$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

注 若两直线 $l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, $l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ 相交, 则 l_1 与 l_2

必共面, 故

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot (s_1 \times s_2) &= 0, \\ \text{即有} \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

 19. 已知点 $A(1, 0, 0)$ 及点 $B(0, 2, 1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

解 所求点位于 z 轴, 设其坐标为 $C(0, 0, z)$, 由向量的几何意义知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0-1 & 2-0 & 1-0 \\ 0-1 & 0-0 & z-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} \\ &= 2zi + (z-1)j + 2k, \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(2z)^2 + (z-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}.$$

设 $f(z) = 5z^2 - 2z + 5$, 则由 $f'(z) = 10z - 2 = 0$ 得 $z = \frac{1}{5}$. 因 $f''\left(\frac{1}{5}\right) = 10 > 0$, 故当

$z = \frac{1}{5}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积取得极小值, 由于驻点唯一, 故当 $z = \frac{1}{5}$, 即 C 的坐标为

$(0, 0, \frac{1}{5})$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 最小.

20. 求曲线 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 在 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 中消去 z , 得 $2 - x^2 - y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$, 即

$x^2 + y^2 - x - y = 0$. 故 $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 为曲线在 xOy 面上的投影曲线方程.

在 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 中消去 y , 得 $z = (x-1)^2 + (\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2$, 即

$2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0$, 故 $\begin{cases} 2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ 为曲线在 xOz 面上

的投影曲线方程.

同理, 可得 $\begin{cases} 2y^2 + 2yz + z^2 - 4y - 3z + 2 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ 它就是曲线在 yOz 面上的投影曲线

方程.

21. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 在 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x \end{cases}$ 中消去 z , 得 $2x = x^2 + y^2$, 即 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 故立体在 xOy

面上的投影为 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \\ z = 0 \end{cases}$ (如图 8-20).

而该立体在 zOx 面上的投影为 $\begin{cases} x \leq z \leq \sqrt{2x}, \\ y = 0 \end{cases}$ (如图 8-20), 在 yOz 面上的投影

为 $\begin{cases} \left(\frac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, \\ x = 0. \end{cases}$

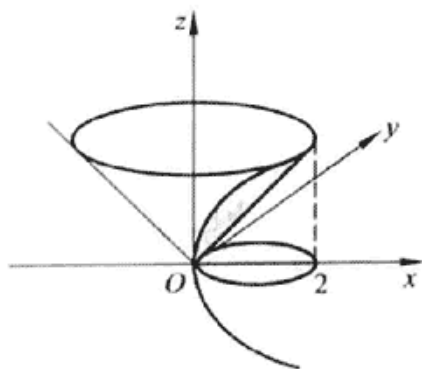


图 8-20

22. 画出下列各曲面所围立体的图形:

- (1) 抛物柱面 $2y^2 = x$, 平面 $z = 0$ 及 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$;
 (2) 抛物柱面 $x^2 = 1 - z$, 平面 $y = 0, z = 0$ 及 $x + y = 1$;
 (3) 圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及旋转抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$;
 (4) 旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$, 柱面 $y^2 = x$, 平面 $z = 0$ 及 $x = 1$.

解 (1) 如图 8-21(a); (2) 如图 8-21(b);
 (3) 如图 8-21(c); (4) 如图 8-21(d).

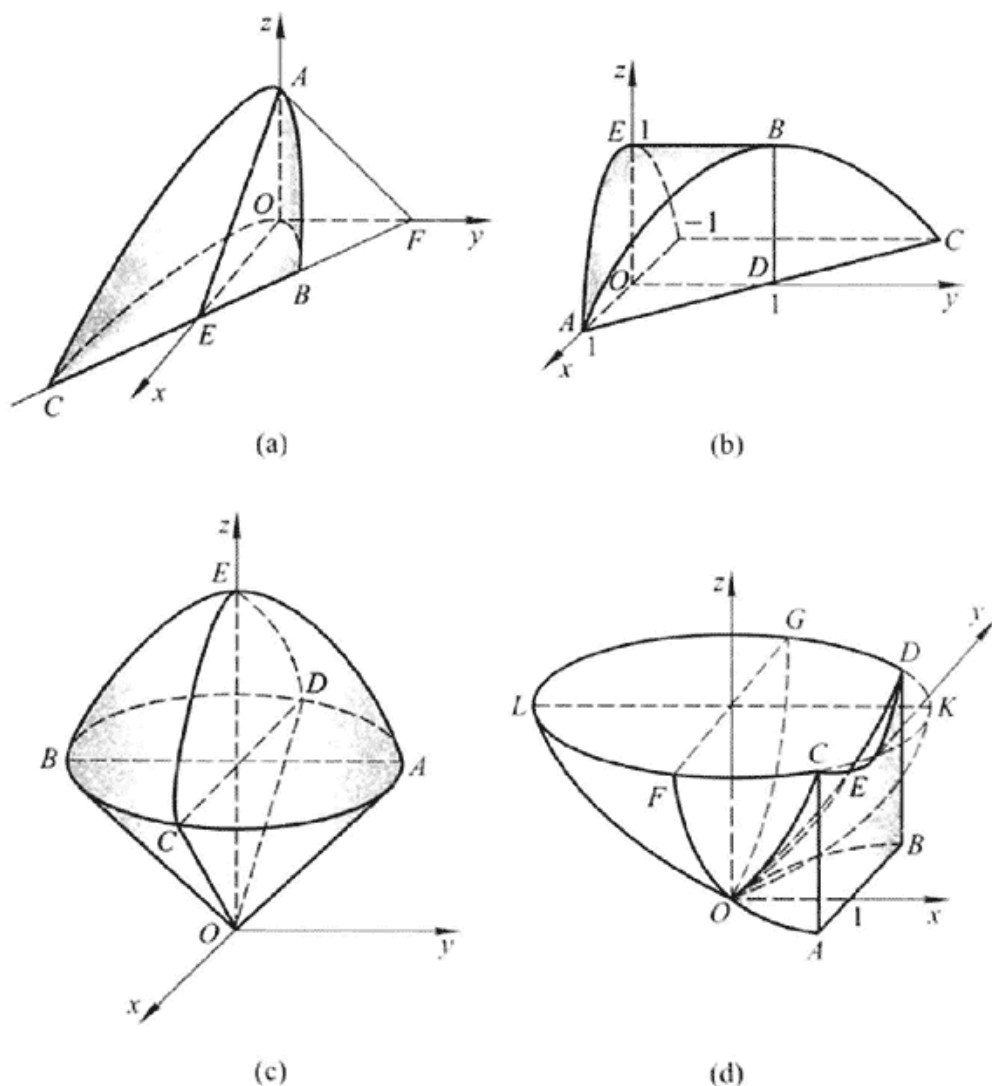


图 8-21

注 在建立了空间直角坐标系后,可按下列方法作图:

- 1° 先作出立体的各表面(曲面),及它们与各坐标面的交线;
- 2° 再作各曲面的交线.

多元函数微分法及其应用

习题 9-1

多元函数的基本概念

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界。

$$(1) \{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}; \quad (2) \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\};$$

$$(3) \{(x, y) \mid y > x^2\};$$

$$(4) \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) \mid x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}.$$

解 (1) 集合是开集，无界集；导集为 $\mathbf{R}^2$ ，边界为 $\{(x, y) \mid x = 0 \text{ 或 } y = 0\}$ 。

(2) 集合既非开集，又非闭集，是有界集；导集为 $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ，边界为 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ 。

(3) 集合是开集，区域，无界集；导集为 $\{(x, y) \mid y \geq x^2\}$ ，边界为 $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ 。

(4) 集合是闭集，有界集；导集为集合本身，边界为 $\{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + (y-2)^2 = 4\}$ 。

2. 已知函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$ ，试求 $f(tx, ty)$ 。

$$\text{解 } f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) \tan \frac{tx}{ty}$$

$$= t^2 \left(x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y} \right)$$

$$= t^2 f(x, y).$$

3. 试证函数 $F(x, y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

$$\begin{aligned} \text{证 } F(xy, uv) &= \ln(xy) \cdot \ln(uv) = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v) \\ &= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v \\ &= F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v). \end{aligned}$$

4. 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$ ，试求 $f(x+y, x-y, xy)$ 。

$$\text{解 } f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$$

5. 求下列各函数的定义域：

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1); \quad (2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}};$$

$$(3) z = \sqrt{x - \sqrt{y}};$$

$$(4) z = \ln(y - x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

$$(5) u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} (R > r > 0);$$

$$(6) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解 (1) $\{(x, y) \mid y^2 - 2x + 1 > 0\}.$

(2) $\{(x, y) \mid x + y > 0, x - y > 0\}.$

(3) $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}.$

(4) $\{(x, y) \mid y - x > 0, x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}.$

(5) $\{(x, y, z) \mid r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$

(6) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}.$

注 本题是求多元函数的定义域,与求一元函数的定义域相类似,先写出构成该函数的各个简单函数的定义域,再求出表示这些定义域的集合的交集,即得所求函数的定义域.

例 6. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2};$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy};$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1};$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y};$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}}.$$

解 (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$

注 本题利用多元初等函数的连续性求极限,即极限值等于函数值.对于多元初等函数在点 P_0 处的极限,若 P_0 在该函数的定义区域内,均可利用此方法求极限.

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}} = \ln 2.$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - (xy+4)}{xy(2 + \sqrt{xy+4})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{2 + \sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

注 本题分母的极限为零,不能运用商的极限运算法则,而采用通过分母或分子有理化等方法,消去分母中趋于零的因子,再运用极限运算法则,这是求极限的基本方法之一.

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} \cdot (\sqrt{2-e^{xy}}+1) = -1 \cdot 2 = -2.$$

注 本题利用 $e^{xy} - 1 \sim xy ((x,y) \rightarrow (0,0))$, 相当于令 $u = xy$, 当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 且 $xy \neq 0$ 时, 有 $u \rightarrow 0$ 且 $u \neq 0$, 于是

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{-u} = -1.$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2.$$

注 本题利用 $\tan(xy) \sim xy ((x,y) \rightarrow (2,0))$.

$$\begin{aligned} (6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2 y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

注 本题利用 $1 - \cos(x^2 + y^2) \sim \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 ((x,y) \rightarrow (0,0))$.

 * 7. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

证 (1) 当 (x,y) 沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+k)x}{(1-k)x} = \frac{1+k}{1-k} \quad (k \neq 1).$$

显然它是随着 k 的值不同而改变的, 故所求极限不存在.

(2) 依次取 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 的两种方式: $y = x, y = -x$, 分别求极限:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1, \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=-x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 4} = 0. \end{aligned}$$

两种方式求得的极限值不同, 故所求极限不存在.

注 本题证明极限不存在所采用的方法是: 找出两条不同的路径, 使得点 P 沿这两条路径趋于 P_0 时, $f(P)$ 的极限存在但不相等; 或者找出一条特殊的路径, 使得点 P 沿这条路径趋于 P_0 时, $f(P)$ 的极限不存在. 这是证明多元函数极限不存在常用的方法.

 8. 函数 $z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 在何处是间断的?

解 这函数的定义域为 $D = \{(x,y) \mid y^2 - 2x \neq 0\}$, 曲线 $y^2 - 2x = 0$ 上各点均为 D 的聚点, 且函数在这些点处没有定义, 因此曲线 $y^2 - 2x = 0$ 上各点均为函数的间断点.

9. 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

证 因为

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

要使 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\sqrt{x^2+y^2} < 2\varepsilon$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon$, 则当 $0 <$

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$ 成立, 即 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

10. 设 $F(x, y) = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续, 证明: 对任意 $y_0 \in \mathbf{R}$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

证 设 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, 因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 从而, 当 $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$ 时, $|x - x_0| \leq \rho(P, P_0) < \delta$, 因而有

$$|F(x, y) - F(x_0, y_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

习题 9-2

偏导数

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^3y - y^3x;$$

$$(2) s = \frac{u^2 + v^2}{uv};$$

$$(3) z = \sqrt{\ln(xy)};$$

$$(4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy);$$

$$(5) z = \ln \tan \frac{x}{y};$$

$$(6) z = (1 + xy)^y;$$

$$(7) u = x^{\frac{y}{x}};$$

$$(8) u = \arctan(x - y)^2.$$

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x$.

$$\begin{aligned} (2) \frac{\partial s}{\partial u} &= \frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2 + v^2) \cdot uv - (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2} \\ &= \frac{2u^2v - (u^2 + v^2)v}{u^2v^2} \\ &= \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial s}{\partial v} &= \frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2 + v^2) \cdot uv - (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2} \\
 &= \frac{2uv^2 - (u^2 + v^2)u}{u^2v^2} \\
 &= \frac{1}{u} - \frac{u}{v^2}.
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= y\cos(xy) + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot y \\
 &= y[\cos(xy) - \sin(2xy)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial y} &= x\cos(xy) + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot x \\
 &= x[\cos(xy) - \sin(2xy)].
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cot \frac{x}{y} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cot \frac{x}{y} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y}.$$

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}] = (1+xy)^y \left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \right].$$

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x.$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

2. 设 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 求证 $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$.

证 因为 $\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \frac{1}{g} = \frac{\pi}{\sqrt{gl}},$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \left(-\frac{l}{g^2}\right) = -\frac{\pi}{g} \sqrt{\frac{l}{g}},$$

所以

$$l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} - \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 0.$$

3. 设 $z = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$, 求证 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

证 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2} e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})},$$

所以

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})} = 2z.$$

4. 设 $f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f_x(x, 1)$.

解

$$f_x(x, y) = 1 + \frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y},$$

$$f_x(x, 1) = 1.$$

5. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$, 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

解 设 $z = f(x, y)$. 按偏导数的几何意义, $f_x(2, 4)$ 就是曲线在点 $(2, 4, 5)$ 处的

切线对于 x 轴的斜率, 而 $f_x(2, 4) = \frac{1}{2}x \Big|_{x=2} = 1$, 即 $k = \tan \alpha = 1$, 于是倾角 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$(1) z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2;$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$(3) z = y^x.$$

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 - 8xy^2) = -16xy.$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^x \ln y) = y^{x-1}(1 + x \ln y).$$

7. 设 $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, 求 $f_{xx}(0, 0, 1)$, $f_{xz}(1, 0, 2)$, $f_{yz}(0, -1, 0)$ 及 $f_{zzx}(2, 0, 1)$.

解 因为 $f_x = y^2 + 2xz$, $f_{xx} = 2z$, $f_{xz} = 2x$,

$$f_y = 2xy + z^2, \quad f_{yz} = 2z,$$

$$f_z = 2yz + x^2, \quad f_{zz} = 2y, \quad f_{zzx} = 0,$$

所以 $f_{xx}(0, 0, 1) = 2$, $f_{xz}(1, 0, 2) = 2$, $f_{yz}(0, -1, 0) = 0$, $f_{zzx}(2, 0, 1) = 0$.

8. 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

(1) $y = e^{-kn^2 t} \sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$.

证 (1) 因为 $\frac{\partial y}{\partial t} = -kn^2 e^{-kn^2 t} \sin nx$, $\frac{\partial y}{\partial x} = ne^{-kn^2 t} \cos nx$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(ne^{-kn^2 t} \cos nx) = -n^2 e^{-kn^2 t} \sin nx,$$

所以 $\frac{\partial y}{\partial t} = k(-n^2 e^{-kn^2 t} \sin nx) = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

(2) 因为 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{r^2 - x^2}{r^3},$$

由函数关于自变量的对称性,得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3},$$

所以
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

习题 9-3

全微分

1. 求下列函数的全微分:

$$(1) z = xy + \frac{x}{y}; \quad (2) z = e^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (4) u = x^{yz}.$$

解 (1) 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2},$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(y + \frac{1}{y} \right) dx + \left(x - \frac{x}{y^2} \right) dy.$$

(2) 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}},$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} (y dx - x dy).$$

(3) 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (y dx - x dy).$$

(4) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{yz-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx^{yz} \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = yx^{yz} \ln x,$$

所以

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz.$$

2. 求函数 $z = \ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1, y=2$ 时的全微分.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{2}{3},$$

所以

$$dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3} dx + \frac{2}{3} dy.$$

3. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解

$$\Delta z = \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} - \frac{y}{x}, \quad dz = -\frac{y}{x^2} \Delta x + \frac{1}{x} \Delta y.$$

当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时, 全增量

$$\Delta z = \frac{1+(-0.2)}{2+0.1} - \frac{1}{2} = -0.119,$$

全微分

$$dz = -\frac{1}{4} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot (-0.2) = -0.125.$$

4. 求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时的全微分.

解

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = ye^{xy} \Delta x + xe^{xy} \Delta y.$$

当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时, 全微分

$$dz = e \cdot 0.15 + e \cdot 0.1 = 0.25e.$$

5. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面四条性质:

- (1) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续;
- (2) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续;
- (3) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微分;
- (4) $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 存在.

若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出性质 Q , 则下列四个选项中正确的是().

- (A) (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) (B) (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)
 (C) (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) (D) (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (4)

解 由于二元函数偏导数存在且连续是二元函数可微分的充分条件, 二元函数可微分必定可(偏)导, 二元函数可微分必定连续, 因此选项(A)正确.

选项(B)中(3) $\neq$ (2), 选项(C)中(4) $\neq$ (1), 选项(D)中(1) $\neq$ (4).

 * 6. 计算 $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z = \sqrt{x^3 + y^3}$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{(x + \Delta x)^3 + (y + \Delta y)^3} &= \sqrt{x^3 + y^3} + \Delta z \approx \sqrt{x^3 + y^3} + dz \\ &= \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3x^2 \Delta x + 3y^2 \Delta y}{2\sqrt{x^3 + y^3}}.\end{aligned}$$

取 $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$, 可得

$$\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx \sqrt{1 + 2^3} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 0.02 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-0.03)}{2\sqrt{1 + 2^3}} = 2.95.$$

 * 7. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值 ($\ln 2 = 0.693$).

解 设 $z = x^y$, 则

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} = x^y + \Delta z \approx x^y + dz = x^y + yx^{y-1} \Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y.$$

取 $x = 2, y = 1, \Delta x = -0.03, \Delta y = 0.05$, 可得

$$(1.97)^{1.05} \approx 2 - 0.03 + 2 \ln 2 \cdot 0.05 = 1.97 + 0.0693 \approx 2.039.$$

 * 8. 已知边长为 $x = 6$ m 与 $y = 8$ m 的矩形, 如果 x 边增加 5 cm 而 y 边减少 10 cm, 问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \Delta x + y \Delta y).$$

当 $x = 6, y = 8, \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.1$ 时,

$$\Delta z \approx \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} (6 \cdot 0.05 - 8 \cdot 0.1) = -0.05.$$

即, 这个矩形的对角线的长减少大约 5 cm.

 * 9. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm, 内高为 20 cm, 内半径为 4 cm. 求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V = \pi R^2 H$, 圆柱形容器的外壳体积就是圆柱体体积 V 的增量 ΔV , 而

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial V}{\partial H} \Delta H = 2\pi R H \Delta R + \pi R^2 \Delta H.$$

当 $R = 4, H = 20, \Delta R = \Delta H = 0.1$ 时,

$$\Delta V \approx 2 \cdot 3.14 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0.1 + 3.14 \cdot 4^2 \cdot 0.1 \approx 55.3.$$

即容器外壳的体积大约是 55.3 cm^3 .

 * 10. 设有直角三角形, 测得其两直角边的长分别为 (7 ± 0.1) cm 和 (24 ± 0.1) cm. 试求利用上述两值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为 x 和 y , 则斜边长度为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\begin{aligned}
 |\Delta z| \approx |dz| &= \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| |\Delta y| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x |\Delta x| + y |\Delta y|) \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \delta_x + y \delta_y),
 \end{aligned}$$

使得

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \delta_x + y \delta_y).$$

当 $x = 7, y = 24, \delta_x = 0.1, \delta_y = 0.1$ 时,

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 24^2}} (7 \cdot 0.1 + 24 \cdot 0.1) = 0.124.$$

即计算斜边长度 z 的绝对误差约为 0.124 cm .

 * 11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为 $(63 \pm 0.1) \text{ m}$ 和 $(78 \pm 0.1) \text{ m}$, 这两边的夹角为 $60^\circ \pm 1^\circ$. 试求三角形面积的近似值, 并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b , 它们的夹角为 θ , 则三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta,$$

$$\begin{aligned}
 |\Delta S| \approx |dS| &= \left| \frac{\partial S}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial S}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial S}{\partial \theta} \Delta \theta \right| \\
 &\leq \left| \frac{\partial S}{\partial a} \right| |\Delta a| + \left| \frac{\partial S}{\partial b} \right| |\Delta b| + \left| \frac{\partial S}{\partial \theta} \right| |\Delta \theta| \\
 &= \frac{1}{2} b \sin \theta |\Delta a| + \frac{1}{2} a \sin \theta |\Delta b| + \frac{1}{2} ab \cos \theta |\Delta \theta| \\
 &\leq \frac{1}{2} b \sin \theta \delta_a + \frac{1}{2} a \sin \theta \delta_b + \frac{1}{2} ab \cos \theta \delta_\theta,
 \end{aligned}$$

使得

$$\delta_S = \frac{1}{2} b \sin \theta \delta_a + \frac{1}{2} a \sin \theta \delta_b + \frac{1}{2} ab \cos \theta \delta_\theta.$$

当 $a = 63, b = 78, \theta = \frac{\pi}{3}, \delta_a = 0.1, \delta_b = 0.1, \delta_\theta = \frac{\pi}{180}$ 时, 三角形面积的近似

值为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 78 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2127.8 (\text{m}^2),$$

绝对误差为

$$\begin{aligned}
 \delta_S &= \frac{1}{2} \cdot 78 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 78 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \\
 &= 27.6 (\text{m}^2),
 \end{aligned}$$

相对误差为

$$\frac{\delta_s}{S} = \frac{27.6}{2127.8} = 1.30\%.$$

 * 12. 利用全微分证明: 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

证 设 $u = x + y$, 则

$$\begin{aligned} |\Delta u| &\approx |du| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right| \\ &= |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \leq \delta_x + \delta_y, \end{aligned}$$

便得

$$\delta_u = \delta_x + \delta_y,$$

即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

 * 13. 利用全微分证明: 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和, 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

证 设 $u = xy, v = \frac{x}{y}$, 则

$$\begin{aligned} |\Delta u| &\approx |du| = |y\Delta x + x\Delta y| \leq |y||\Delta x| + |x||\Delta y| \leq |y|\delta_x + |x|\delta_y, \\ |\Delta v| &\approx |dv| = \left| \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2} \right| \leq \frac{|y||\Delta x| + |x||\Delta y|}{|y|^2} \leq \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2}, \end{aligned}$$

便得

$$\begin{aligned} \delta_u &= |y|\delta_x + |x|\delta_y, \quad \delta_v = \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2}, \\ \frac{\delta_u}{|u|} &= \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|xy|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}, \\ \frac{\delta_v}{|v|} &= \frac{1}{\left|\frac{x}{y}\right|} \cdot \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}. \end{aligned}$$

即乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和, 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

习题 9-4

多元复合函数的求导法则

 1. 设 $z = u^2 + v^2$, 而 $u = x + y, v = x - y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot 1 = 2(u + v) = 4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot (-1) = 2(u - v) = 4y.$$

 2. 设 $z = u^2 \ln v$, 而 $u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3 \\
 &= \frac{2x}{y^2} \ln(3x - 2y) + \frac{3x^2}{(3x - 2y)y^2}, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2) \\
 &= -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x - 2y) - \frac{2x^2}{(3x - 2y)y^2}.
 \end{aligned}$$

例 3. 设 $z = e^{x-2y}$, 而 $x = \sin t, y = t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cdot \cos t + e^{x-2y} \cdot (-2) \cdot 3t^2 \\
 &= e^{x-2y} (\cos t - 6t^2) = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).
 \end{aligned}$$

例 4. 设 $z = \arcsin(x - y)$, 而 $x = 3t, y = 4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x - y)^2}} \cdot 3 + \frac{(-1)}{\sqrt{1 - (x - y)^2}} \cdot 12t^2 \\
 &= \frac{3(1 - 4t^2)}{\sqrt{1 - (3t - 4t^3)^2}}.
 \end{aligned}$$

例 5. 设 $z = \arctan(xy)$, 而 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 + x^2 y^2} + \frac{x}{1 + x^2 y^2} \cdot e^x \\
 &= \frac{(1 + x)e^x}{1 + x^2 e^{2x}}.
 \end{aligned}$$

例 6. 设 $u = \frac{e^{ax}(y - z)}{a^2 + 1}$, 而 $y = a \sin x, z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \\
 &= \frac{ae^{ax}(y - z)}{a^2 + 1} + \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} \cdot a \cos x + \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} \cdot (-1) \cdot (-\sin x) \\
 &= \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} (a^2 \sin x - a \cos x + a \cos x + \sin x) \\
 &= e^{ax} \sin x.
 \end{aligned}$$

例 7. 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 而 $x = u + v, y = u - v$, 验证

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \\ &\quad \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot (-1) \\ &= \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{u-v}{u^2 + v^2}, \end{aligned}$$

故等式成立.

 8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

$$(1) u = f(x^2 - y^2, e^{xy}); \quad (2) u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right);$$

$$(3) u = f(x, xy, xyz).$$

解 (1) 将中间变量 $x^2 - y^2, e^{xy}$ 依次编为 1, 2 号, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 令 } s = \frac{x}{y}, t = \frac{y}{z}, \text{ 则 } u = f(s, t),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{y}f_s, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f_s + \frac{1}{z}f_t, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f_t. \end{aligned}$$

(3) 将中间变量 x, xy, xyz 依次编为 1, 2, 3 号, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz = xf'_2 + xzf'_3, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= f'_3 \cdot xy = xyf'_3. \end{aligned}$$

9. 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= x \left[y + F(u) + x f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + y \left[x + x f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ &= x \left[y + F(u) - \frac{y}{x} f'(u) \right] + y [x + f'(u)] \\ &= xy + xF(u) + xy = z + xy, \end{aligned}$$

故等式成立.

10. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-y \cdot f_u \cdot 2x}{f^2(u)} = -\frac{2xyf_u}{f^2(u)}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{f(u) - yf_u \cdot (-2y)}{f^2(u)} = \frac{1}{f(u)} + \frac{2y^2f_u}{f^2(u)}, \end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yf_u}{f^2(u)} + \frac{1}{yf(u)} + \frac{2yf_u}{f^2(u)} = \frac{1}{yf(u)} = \frac{z}{y^2}.$$

11. 设 $z = f(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u = x^2 + y^2$, 则 $z = f(u)$. 记 $f' = f'(u)$, $f'' = f''(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2yf',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2f' + 4x^2f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 2yf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2f' + 4y^2f''.$$

12. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数):

$$(1) z = f(xy, y); \quad (2) z = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$$

$$(3) z = f(xy^2, x^2y); \quad (4) z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y}).$$

解 (1) 令 $s = xy, t = y$, 则 $z = f(s, t)$, s 和 t 是中间变量. 将 s, t 依次编为 1, 2 号, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = yf'_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f'_2 \cdot \frac{dt}{dy} = xf'_1 + f'_2.$$

因为 $f(s, t)$ 是 s 和 t 的函数, 所以 f'_1 和 f'_2 也是 s 和 t 的函数, 从而 f'_1 和 f'_2 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数. 故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (yf'_1) = yf''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = y^2 f''_{11},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (yf'_1) = f'_1 + y \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \cdot \frac{dt}{dy} \right) \\ &= f'_1 + xyf''_{11} + yf''_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (xf'_1 + f'_2) \\ &= x \left(f''_{11} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \frac{dt}{dy} \right) + f''_{21} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \frac{dt}{dy} \\ &= x^2 f''_{11} + 2xf''_{12} + f''_{22}. \end{aligned}$$

(2) 令 $s = x, t = \frac{x}{y}$, 并将 s, t 依次编为 1, 2 号, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{ds}{dx} + f'_2 \frac{dt}{dx} = f'_1 + \frac{1}{y} f'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_2 \frac{dt}{dy} = -\frac{x}{y^2} f'_2.$$

因为 $f(s, t)$ 是 s 和 t 的函数, 所以 f'_1 和 f'_2 也是 s 和 t 的函数, 从而 f'_1 和 f'_2 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数. 故

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 \right) = f''_{11} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{1}{y} \left(f''_{21} + f''_{22} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) \\ &= f''_{11} + \frac{2}{y} f''_{12} + \frac{1}{y^2} f''_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 \right) = f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{1}{y^2} f'_2 + \frac{1}{y} f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} \\ &= -\frac{x}{y^2} f''_{12} - \frac{1}{y^2} f'_2 - \frac{x}{y^3} f''_{22}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} f'_2 \right) = \frac{2x}{y^3} f'_2 - \frac{x}{y^2} f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{2x}{y^3} f'_2 + \frac{x^2}{y^4} f''_{22}.$$

(3) 令 $s = xy^2, t = x^2y$, 并将 s, t 依次编为 1, 2 号, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial s}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial t}{\partial x} = y^2 f'_1 + 2xy f'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \frac{\partial s}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial t}{\partial y} = 2xy f'_1 + x^2 f'_2.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y^2 f'_1 + 2xy f'_2) \\&= y^2 \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) + 2y f'_2 + 2xy \left(f''_{21} \frac{\partial s}{\partial x} + f''_{22} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \\&= y^2 (y^2 f''_{11} + 2xy f''_{12}) + 2y f'_2 + 2xy (y^2 f''_{21} + 2xy f''_{22}) \\&= 2y f'_2 + y^4 f''_{11} + 4xy^3 f''_{12} + 4x^2 y^2 f''_{22},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 f'_1 + 2xy f'_2) \\&= 2y f'_1 + y^2 \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \\&\quad 2x f'_2 + 2xy \left(f''_{21} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\&= 2y f'_1 + y^2 (2xy f''_{11} + x^2 f''_{12}) + 2x f'_2 \\&\quad + 2xy (2xy f''_{21} + x^2 f''_{22}) \\&= 2y f'_1 + 2x f'_2 + 2xy^3 f''_{11} + 5x^2 y^2 f''_{12} + 2x^3 y f''_{22},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy f'_1 + x^2 f'_2) \\&= 2x f'_1 + 2xy \left(f''_{11} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \frac{\partial t}{\partial y} \right) + x^2 \left(f''_{21} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\&= 2x f'_1 + 2xy (2xy f''_{11} + x^2 f''_{12}) + x^2 (2xy f''_{21} + x^2 f''_{22}) \\&= 2x f'_1 + 4x^2 y^2 f''_{11} + 4x^3 y f''_{12} + x^4 f''_{22}.\end{aligned}$$

(4) 令 $u = \sin x, v = \cos y, w = e^{x+y}$, 并将 u, v, w 依次编为 1, 2, 3 号, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{du}{dx} + f'_3 \frac{dw}{dx} = \cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_2 \frac{dv}{dy} + f'_3 \frac{dw}{dy} = -\sin y f'_2 + e^{x+y} f'_3,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3) \\&= -\sin x f'_1 + \cos x \left(f''_{11} \frac{du}{dx} + f''_{13} \frac{dw}{dx} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left(f''_{31} \frac{du}{dx} + f''_{33} \frac{dw}{dx} \right) \\&= -\sin x f'_1 + \cos x (\cos x f''_{11} + e^{x+y} f''_{13}) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} (\cos x f''_{31} + e^{x+y} f''_{33})\end{aligned}$$

$$= e^{x+y} f_3' - \sin x f_1' + \cos^2 x f_{11}'' + 2e^{x+y} \cos x f_{13}'' + e^{2(x+y)} f_{33}'' ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\cos x f_1' + e^{x+y} f_3')$$

$$= \cos x \left(f_{12}'' \frac{dv}{dy} + f_{13}'' \frac{\partial w}{\partial y} \right) + e^{x+y} f_3' + e^{x+y} \left(f_{32}'' \frac{dv}{dy} + f_{33}'' \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$= \cos x (-\sin y f_{12}'' + e^{x+y} f_{13}'') + e^{x+y} f_3' + e^{x+y} (-\sin y f_{32}'' + e^{x+y} f_{33}'')$$

$$= e^{x+y} f_3' - \cos x \sin y f_{12}'' + e^{x+y} \cos x f_{13}'' - e^{x+y} \sin y f_{32}'' + e^{2(x+y)} f_{33}'' ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-\sin y f_2' + e^{x+y} f_3')$$

$$= -\cos y f_2' - \sin y \left(f_{22}'' \frac{dv}{dy} + f_{23}'' \frac{\partial w}{\partial y} \right) + e^{x+y} f_3' + e^{x+y} \left(f_{32}'' \frac{dv}{dy} + f_{33}'' \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$= -\cos y f_2' - \sin y (-\sin y f_{22}'' + e^{x+y} f_{23}'') + e^{x+y} f_3' + e^{x+y} (-\sin y f_{32}'' + e^{x+y} f_{33}'')$$

$$= e^{x+y} f_3' - \cos y f_2' + \sin^2 y f_{22}'' - 2e^{x+y} \sin y f_{23}'' + e^{2(x+y)} f_{33}'' .$$

 * 13. 设 $u = f(x, y)$ 的所有二阶偏导数连续, 而

$$x = \frac{s - \sqrt{3}t}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}s + t}{2},$$

证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad \text{及} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

证 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y},$$

所以

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 . \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

习题 9-5

隐函数的求导公式

1. 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$, 则

$$F_x = e^x - y^2, \quad F_y = \cos y - 2xy.$$

当 $F_y \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy} \\
 &= \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}.
 \end{aligned}$$

2. 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$, 则一阶偏导数分别为

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y - x}{x^2 + y^2}.$$

当 $F_y \neq 0$ 时, 有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x+y}{x^2+y^2} \bigg/ \frac{y-x}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x-y}.$$

3. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一 设 $F(x, y, z) = x + 2y + z - 2\sqrt{xyz}$, 则

$$F_x = 1 - \frac{yz}{\sqrt{xyz}}, \quad F_y = 2 - \frac{xz}{\sqrt{xyz}}, \quad F_z = 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}.$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

解法二 在所给方程两端分别对 x 求偏导数, 并注意 $z = z(x, y)$, 得

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{xyz}} \left(yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\text{当 } 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}} \neq 0 \text{ 时, 解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{yz}{\sqrt{xyz}} - 1}{1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

同理, 方程两端分别对 y 求偏导数, 得

$$2 + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{xyz}} \left(xz + xy \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\text{当 } 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}} \neq 0 \text{ 时, 解得 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{xz}{\sqrt{xyz}} - 2}{1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

解法三 对所给方程两端分别求全微分, 得

$$dx + 2dy + dz - \frac{1}{\sqrt{xyz}}(yzdx + xzdy + xydz) = 0,$$

即

$$\left(1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}\right)dz = \left(\frac{yz}{\sqrt{xyz}} - 1\right)dx + \left(\frac{xz}{\sqrt{xyz}} - 2\right)dy.$$

当 $\sqrt{xyz} - xy \neq 0$ 时, 解得 $dz = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}dx + \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}dy$. 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

例 4. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$F_x = \frac{1}{z}, \quad F_y = -\frac{1}{\frac{z}{y}} \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) = \frac{1}{y},$$

$$F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{\frac{z}{y}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x+z}{z^2}.$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{z} / \left(-\frac{x+z}{z^2}\right) = \frac{z}{x+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{y} / \left(-\frac{x+z}{z^2}\right) = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

例 5. 设 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

证 设 $F(x, y, z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z$, 则

$$F_x = 2\cos(x+2y-3z) - 1,$$

$$F_y = 2\cos(x+2y-3z) \cdot 2 - 2 = 2F_x,$$

$$F_z = 2\cos(x+2y-3z) \cdot (-3) + 3 = -3F_x,$$

故当 $F_z \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_x}{F_z} - \frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

例 6. 设 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的具有连续

偏导数的函数, 证明: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

证 因为

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},$$

所以

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \cdot \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$$

例 7. 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z =$

$f(x, y)$ 满足 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

证 令 $u = cx - az$, $v = cy - bz$, 则

$$\Phi_x = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = c \Phi_u,$$

$$\Phi_y = \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = c \Phi_v,$$

$$\Phi_z = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -a \Phi_u - b \Phi_v.$$

故当 $\Phi_z \neq 0$ 时,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = \frac{c \Phi_u}{a \Phi_u + b \Phi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = \frac{c \Phi_v}{a \Phi_u + b \Phi_v}.$$

于是

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{c \Phi_u}{a \Phi_u + b \Phi_v} + b \cdot \frac{c \Phi_v}{a \Phi_u + b \Phi_v} = c.$$

 * 8. 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x, y, z) = e^z - xyz$, 则 $F_x = -yz$, $F_z = e^z - xy$. 于是当 $F_z \neq 0$ 时,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} (e^z - xy) - yz \left(e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right)}{(e^z - xy)^2} \\ &= \frac{y^2 z - yz \left(e^z \cdot \frac{yz}{e^z - xy} - y \right)}{(e^z - xy)^2} \\ &= \frac{2y^2 z e^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}. \end{aligned}$$

 * 9. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 设 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$, 则

$$F_x = -3yz, \quad F_y = -3xz, \quad F_z = 3z^2 - 3xy.$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时,有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz}{z^2 - xy} \right) \\ &= \frac{\left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) (z^2 - xy) - yz \left(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy}\right) \cdot (z^2 - xy) - yz\left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} \\
 &= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.
 \end{aligned}$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$;

(2) 设 $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ 求 $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$;

(3) 设 $\begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2y), \end{cases}$ 其中 f, g 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$;

(4) 设 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1) 分别在两个方程两端对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}, \\ 2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

移项, 得

$$\begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2x, \\ 2y \frac{dy}{dx} + 3z \frac{dz}{dx} = -x. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix} = 6yz + 2y \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y} = \frac{-x(6z + 1)}{2y(3z + 1)}, \\
 \frac{dz}{dx} &= \frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix}}{D} = \frac{2xy}{6yz + 2y} = \frac{x}{3z + 1}.
 \end{aligned}$$

(2) 所给方程组确定两个一元隐函数: $x = x(z)$ 和 $y = y(z)$, 将所给方程的两端分别对 z 求导并移项, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1, \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} = -2z. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y-x) \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2z & 2y \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2y+2z}{2(y-x)} = \frac{y-z}{x-y},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2z+2x}{2(y-x)} = \frac{z-x}{x-y}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数: $u = u(x, y), v = v(x, y)$.

分别在方程两端对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \left(u + x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f'_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = g'_1 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right) + 2g'_2 yv \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

移项整理后得

$$\begin{cases} (xf'_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x} = -uf'_1, \\ g'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (2yvg'_2 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} = g'_1. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} xf'_1 - 1 & f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2 - 1 \end{vmatrix} = (xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 g'_1 \neq 0$ 时, 解方程组

得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -uf'_1 & f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2 - 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-uf'_1(2yvg'_2 - 1) - f'_2 g'_1}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 g'_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} xf'_1 - 1 & -uf'_1 \\ g'_1 & g'_1 \end{vmatrix} = \frac{g'_1(xf'_1 + uf'_1 - 1)}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 g'_1}. \end{aligned}$$

(4) 此方程组确定的两个二元隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 是已知函数的反函数, 令

$$F(x, y, u, v) = x - e^u - u \sin v,$$

$$G(x, y, u, v) = y - e^u + u \cos v.$$

则

$$F_x = 1, \quad F_y = 0, \quad F_u = -e^u - \sin v, \quad F_v = -u \cos v,$$

$$G_x = 0, \quad G_y = 1, \quad G_u = -e^u + \cos v, \quad G_v = -u \sin v.$$

当 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -e^u - \sin v & -u \cos v \\ -e^u + \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u \neq 0$ 时, 由

隐函数求导公式得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & -u \cos v \\ 0 & -u \sin v \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\sin v}{e^u (\sin v - \cos v) + 1}, \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} 0 & -u \cos v \\ 1 & -u \sin v \end{vmatrix} \\
 &= \frac{-\cos v}{e^u (\sin v - \cos v) + 1}, \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} -e^u - \sin v & 1 \\ -e^u + \cos v & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\cos v - e^u}{u [e^u (\sin v - \cos v) + 1]}, \\
 \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} -e^u - \sin v & 0 \\ -e^u + \cos v & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\sin v + e^u}{u [e^u (\sin v - \cos v) + 1]}.
 \end{aligned}$$

例 11. 设 $y = f(x, t)$, 而 $t = t(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的函数, 其中 f, F 都具有有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证法一 由方程组 $\begin{cases} y = f(x, t), \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases}$ 可确定两个一元隐函数 $y = y(x), t = t(x)$. 分别

在两个方程两端对 x 求导可得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = 0. \end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \end{cases}$$

$$\text{当 } D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \text{ 时, 解方程组得}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

证法二 分别在 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$ 两端求全微分, 得

$$\begin{cases} dy = f_x dx + f_t dt, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_t dt = 0. & (2) \end{cases}$$

由(2), 得

$$F_t dt = -(F_x dx + F_y dy). \quad (3)$$

将 F_t 乘(1)式两端, 并以(3)式代入, 得

$$F_t dy = f_x F_t dx - f_t (F_x dx + F_y dy),$$

即

$$(F_t + f_t F_y) dy = (f_x F_t - f_t F_x) dx.$$

故当 $F_t + f_t F_y \neq 0$ 时, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + f_t F_y}.$$

习题 9-6

多元函数微分学的几何应用

1. 设 $f(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$, $g(t) = g_1(t)i + g_2(t)j + g_3(t)k$, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = u$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = v$, 证明 $\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) \times g(t)] = u \times v$.

$$\begin{aligned} \text{证 } \lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) \times g(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t) \right) i - \left(f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t) \right) j \\ &\quad + \left(f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t) \right) k \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} [f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t)], \lim_{t \rightarrow t_0} [f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t)], \right. \\ &\quad \left. \lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)] \right) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} g_3(t) \end{vmatrix} = u \times v. \end{aligned}$$

这个结果表示:两个向量值函数的向量积的极限等于它们各自的极限(向量)的向量积,即

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) \times g(t)] = [\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)] \times [\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)].$$

2. 下列各题中, $r=f(t)$ 是空间中的质点 M 在时刻 t 的位置, 求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量, 以及在任意时刻 t 的速率.

$$(1) \quad r=f(t)=(t+1)i+(t^2-1)j+2tk, t_0=1;$$

$$(2) \quad r=f(t)=(2\cos t)i+(3\sin t)j+4tk, t_0=\frac{\pi}{2};$$

$$(3) \quad r=f(t)=[2\ln(t+1)]i+t^2j+\frac{1}{2}t^2k, t_0=1.$$

解 (1) 速度向量 $v_0 = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=1} = (i+2tj+2k) \Big|_{t=1} = i+2j+2k;$

加速度向量 $a_0 = \left. \frac{d^2r}{dt^2} \right|_{t=1} = 2j;$

速率 $|v(t)| = |i+2tj+2k| = \sqrt{5+4t^2}.$

(2) 速度向量 $v_0 = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = [(-2\sin t)i+(3\cos t)j+4k]_{t=\frac{\pi}{2}} = -2i+4k;$

加速度向量 $a_0 = \left. \frac{d^2r}{dt^2} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = [(-2\cos t)i-(3\sin t)j]_{t=\frac{\pi}{2}} = -3j;$

速率 $|v(t)| = |(-2\sin t)i+(3\cos t)j+4k| = \sqrt{9\cos^2 t+4\sin^2 t+16}$
 $= \sqrt{20+5\cos^2 t}.$

(3) 速度向量 $v_0 = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=1} = \left(\frac{2}{t+1}i+2tj+tk \right) \Big|_{t=1} = i+2j+k;$

加速度向量 $a_0 = \left. \frac{d^2r}{dt^2} \right|_{t=1} = \left[-\frac{2}{(t+1)^2}i+2j+k \right]_{t=1} = -\frac{1}{2}i+2j+k;$

速率 $|v(t)| = \left| \frac{2}{t+1}i+2tj+tk \right| = \sqrt{5t^2 + \frac{4}{(t+1)^2}}.$

3. 求曲线 $r=f(t)=(t-\sin t)i+(1-\cos t)j+\left(4\sin \frac{t}{2}\right)k$ 在与 $t_0=\frac{\pi}{2}$ 相应的点处的切线及法平面方程.

解 与 $t_0=\frac{\pi}{2}$ 相应的点为 $\left(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2}\right)$, 曲线在该点处的切向量为 $T=$

$f'(t_0)=(1, 1, \sqrt{2})$, 于是所求切线方程为

$$\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) + 1 \cdot (y - 1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0,$$

即

$$x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4.$$

4. 求曲线 $x = \frac{t}{1+t}, y = \frac{1+t}{t}, z = t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程.

解 曲线在对应于 $t=1$ 的点为 $\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$, 该点处的切向量

$$\boldsymbol{T} = \left(x'(1), y'(1), z'(1)\right) = \left(\frac{1}{(1+t)^2}, -\frac{1}{t^2}, 2t\right) \Big|_{t=1} = \left(\frac{1}{4}, -1, 2\right),$$

于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{2},$$

即

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8}.$$

所求法平面方程为

$$\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) - (y - 2) + 2(z - 1) = 0,$$

即

$$2x - 8y + 16z - 1 = 0.$$

5. 求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程中的参数为 x , 将方程 $y^2 = 2mx$ 和 $z^2 = m - x$ 两端分别对 x 求导, 得

$$2y \frac{dy}{dx} = 2m, \quad 2z \frac{dz}{dx} = -1, \quad \text{即} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点 (x_0, y_0, z_0) 的切向量为

$$\boldsymbol{T} = \left(1, \frac{m}{y_0}, -\frac{1}{2z_0}\right).$$

于是在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\frac{m}{y_0}} = \frac{z - z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

法平面方程为 $(x - x_0) + \frac{m}{y_0}(y - y_0) - \frac{1}{2z_0}(z - z_0) = 0$.

6. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0, \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

解法一 为了求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, 在所给方程两端分别对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} - 3 = 0, \\ 2 - 3 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = -2x + 3, \\ 3 \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dz}{dx} = 2. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10y - 6z \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -2x + 3 & 2z \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{10x - 4z - 15}{-10y - 6z},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2y & -2x + 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6x + 4y - 9}{-10y - 6z}.$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1,1)} = \frac{9}{16}, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{16}.$$

于是在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\frac{9}{16}} = \frac{z-1}{-\frac{1}{16}},$$

即

$$\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}.$$

法平面方程为

$$(x-1) + \frac{9}{16}(y-1) - \frac{1}{16}(z-1) = 0,$$

即

$$16x + 9y - z - 24 = 0.$$

解法二 所求曲线的切线, 也就是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面与平面 $2x - 3y + 5z = 4$ 的交线, 利用曲面的切平面方程得所求切线为

$$\begin{cases} -(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0, \\ 2x - 3y + 5z = 4. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 3, \\ 2x - 3y + 5z = 4. \end{cases}$$

这切线的方向向量为 $(16, 9, -1)$, 于是所求法平面方程为

$$16(x-1) + 9(y-1) - (z-1) = 0,$$

即

$$16x + 9y - z - 24 = 0.$$

7. 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点, 使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 因为 $x_t=1, y_t=2t, z_t=3t^2$, 设所求点对应的参数为 t_0 , 于是曲线在该点处的切向量可取为 $T=(1, 2t_0, 3t_0^2)$. 已知平面的法向量为 $n=(1, 2, 1)$, 由切线与平面平行, 得 $T \cdot n=0$, 即 $1+4t_0+3t_0^2=0$, 解得 $t_0=-1$ 和 $-\frac{1}{3}$. 于是所求点为 $(-1, 1, -1)$ 或 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

8. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = e^z - z + xy - 3$, 则

$$n = (F_x, F_y, F_z) = (y, x, e^z - 1), \quad n \Big|_{(2,1,0)} = (1, 2, 0).$$

曲面在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为

$$1 \cdot (x-2) + 2(y-1) + 0 \cdot (z-0) = 0,$$

即

$$x + 2y - 4 = 0.$$

曲面在点 $(2, 1, 0)$ 处的法线方程为

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$$

9. 求曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$, 则曲面在点 (x, y, z) 处的一个法向量

$$\begin{aligned} n &= (F_x, F_y, F_z) = (2ax, 2by, 2cz) \\ &= 2(ax, by, cz), \end{aligned}$$

在点 (x_0, y_0, z_0) 处的一个法向量为 (ax_0, by_0, cz_0) , 故曲面在该点处的切平面方程为

$$ax_0(x-x_0) + by_0(y-y_0) + cz_0(z-z_0) = 0,$$

即

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}.$$

10. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$, 则曲面在点 (x, y, z) 处的一个法向量 $n = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 4y, 2z)$. 已知平面的法向量为 $(1, -1, 2)$, 由已知平面与所求切平面平行, 得

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{-1} = \frac{2z}{2}, \quad \text{即} \quad x = \frac{1}{2}z, \quad y = -\frac{1}{4}z.$$

代入椭球面方程得

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{z}{4}\right)^2 + z^2 = 1.$$

解得 $z = \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$, 则 $x = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}$, $y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$. 所以切点为

$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

所求切平面方程为

$$\left(x \pm \sqrt{\frac{2}{11}}\right) - \left(y \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right) + 2\left(z \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right) = 0,$$

即

$$x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11. 求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 令 $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 16$, 曲面的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z) = (6x, 2y, 2z),$$

曲面在点 $(-1, -2, 3)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n} \Big|_{(-1, -2, 3)} = (-6, -4, 6)$, xOy 面的法

向量为 $\boldsymbol{n}_2 = (0, 0, 1)$, 记 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角为 γ , 则所求的余弦值为

$$\cos \gamma = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4^2 + 6^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12. 试证曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

证 设 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$, 则曲面在点 (x, y, z) 处的一个法向量

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right).$$

在曲面上任取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a},$$

化为截距式, 得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a.$$

13. 设 $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)$ 是可导的向量值函数, 证明:

$$(1) \frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] = u'(t) \pm v'(t);$$

$$(2) \frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t);$$

$$(3) \frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t).$$

$$\begin{aligned} \text{证 (1)} \quad & \frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[u(t + \Delta t) \pm v(t + \Delta t)] - [u(t) \pm v(t)]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \pm \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\ &= u'(t) \pm v'(t), \end{aligned}$$

其中用到了向量值函数的极限的四则运算法则.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) \cdot v(t + \Delta t) - u(t) \cdot v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) \cdot v(t + \Delta t) - u(t) \cdot v(t + \Delta t)}{\Delta t} + \\ & \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t) \cdot v(t + \Delta t) - u(t) \cdot v(t)}{\Delta t} \\ &= \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \right] \cdot \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t + \Delta t) \right] + \\ & \quad \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} u(t) \right] \cdot \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \\ &= u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t), \end{aligned}$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及数量积与极限运算次序的交换.

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) \times v(t + \Delta t) - u(t) \times v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) \times v(t + \Delta t) - u(t) \times v(t + \Delta t) + u(t) \times v(t + \Delta t) - u(t) \times v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \times v(t + \Delta t) \right] + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[u(t) \times \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \\ &= \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \right] \times \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t + \Delta t) \right] + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} u(t) \right] \times \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \\ &= u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t), \end{aligned}$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及向量积与极限运算次序的交换.

习题 9-7

方向导数与梯度

1. 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处沿从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

解 按题意, 方向 $l = (1, \sqrt{3})$, $e_l = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\text{又} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = 4,$$

$$\text{故} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1,2)} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z = \ln(x + y)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上点 $(1, 2)$ 处, 沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在 $y^2 = 4x$ 两端分别对 x 求导, 得

$$2y \frac{dy}{dx} = 4.$$

$$\text{于是} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}, \quad k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = 1,$$

$$\text{切线方向 } l = (1, 1), \quad e_l = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{又} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{1}{x+y} \right|_{(1,2)} = \frac{1}{3},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{1}{x+y} \right|_{(1,2)} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1,2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 两端分别对 x 求导, 得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{b}{a},$$

法线斜率为

$$k' = -\frac{1}{k} = \frac{a}{b},$$

内法线方向 $l = (-b, -a)$, $e_l = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$.

又 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{b}.$

故 $\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{b} \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$
 $= \frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2+b^2)}.$

例 4. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - yz, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - xz, \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - xy,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,2)} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1,2)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1,1,2)} = 11.$$

$$e_l = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1,1,2)} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 11 \cdot \frac{1}{2} = 5.$

例 5. 求函数 $u = xyz$ 在点 $(5, 1, 2)$ 处沿从点 $(5, 1, 2)$ 到点 $(9, 4, 14)$ 的方向的方向导数.

解 按题意, 方向 $l = (4, 3, 12)$, $e_l = \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13} \right).$

又 $\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(5,1,2)} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(5,1,2)} = 10, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(5,1,2)} = 5,$$

故 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(5,1,2)} = 2 \cdot \frac{4}{13} + 10 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{98}{13}.$

例 6. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点 $(1, 1, 1)$ 处, 沿曲线在该点的切线正方向 (对应于 t 增大的方向) 的方向导数.

解 先求曲线在给定点的切线方向.

因为 $x_t = 1, y_t = 2t, z_t = 3t^2$, 所以曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线的方向向量可取为

$$T = (1, 2, 3), e_T = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right). \text{ 又}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1,1)} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1,1,1)} = 2,$$

故 $\frac{\partial u}{\partial T} \Big|_{(1,1,1)} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{6}{7} \sqrt{14}.$

7. 求函数 $u = x + y + z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, 则 $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z$, 于是球面在 (x_0, y_0, z_0) 处的外法线方向向量可取为

$$l = (F_x, F_y, F_z) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = (2x_0, 2y_0, 2z_0),$$

l 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}},$$

$$\text{又} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \\ &= 1 \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + 1 \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + 1 \cdot \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \\ &= \frac{x_0 + y_0 + z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \\ &= x_0 + y_0 + z_0. \end{aligned}$$

8. 设 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$, 求 $\text{grad } f(0, 0, 0)$ 及 $\text{grad } f(1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{grad } f(x, y, z) &= f_x i + f_y j + f_z k \\ &= (2x + y + 3)i + (4y + x - 2)j + (6z - 6)k, \\ \text{grad } f(0, 0, 0) &= 3i - 2j - 6k, \\ \text{grad } f(1, 1, 1) &= 6i + 3j. \end{aligned}$$

9. 设函数 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 的各个偏导数都存在且连续, 证明:

$$(1) \quad \nabla(cu) = c\nabla u \quad (\text{其中 } c \text{ 为常数});$$

$$(2) \quad \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v;$$

$$(3) \quad \nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v;$$

$$(4) \quad \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1) \quad \nabla(cu) &= \left(c \frac{\partial u}{\partial x}, c \frac{\partial u}{\partial y}, c \frac{\partial u}{\partial z} \right) = c \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= c\nabla u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \nabla(u \pm v) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \pm \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \pm \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \pm \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \nabla u \pm \nabla v. \\
 (3) \quad \nabla(uv) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv), \frac{\partial}{\partial y}(uv), \frac{\partial}{\partial z}(uv) \right) \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}v + u \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}v + u \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}v + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 &= v \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 &= v \nabla u + u \nabla v.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \nabla \left(\frac{u}{v} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{v} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{v} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{v} \right) \right) \\
 &= \left(\frac{v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}, \frac{v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}, \frac{v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z}}{v^2} \right) \\
 &= \frac{1}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{u}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}.
 \end{aligned}$$

 10. 求函数 $u = xy^2z$ 在点 $P_0(1, -1, 2)$ 处变化最快的方向, 并求沿这个方向的方向导数.

解
$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = y^2 z \mathbf{i} + 2xyz \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k},$$

$$\nabla u|_{P_0} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

由方向导数与梯度的关系可知, $u = xy^2z$ 在 P_0 处沿 $\mathbf{n} = \nabla u|_{P_0} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 的方向增加最快, 其方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{P_0} = |\nabla u|_{P_0}| = |2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{21};$$

沿 $\mathbf{n}_1 = -\nabla u|_{P_0} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 方向减少最快, 其方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n_1} \right|_{P_0} = -\sqrt{21}.$$

习题 9-8

多元函数的极值及其求法

 1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

则下述四个选项中正确的是().

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点
- (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

解 令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,则由题设可知

$$f(x,y) = xy + \rho^4 + o(\rho^4),$$

当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时, $\rho \rightarrow 0$.

由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近的值主要由 xy 决定,而 xy 在 $(0,0)$ 附近符号不定,故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点,即应选(A).

本题也可以取两条路径 $y=x$ 和 $y=-x$ 来考虑.当 $|x|$ 充分小时,

$$f(x,x) = x^2 + 4x^4 + o(x^4) > 0, \quad f(x,-x) = -x^2 + 4x^4 + o(x^4) < 0,$$

故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点,即应选(A).

2. 求函数 $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = 4 - 2x = 0, \\ f_y = -4 - 2y = 0, \end{cases}$$

求得驻点 $(2, -2)$.

又 $A = f_{xx}(2, -2) = -2 < 0$, $B = f_{xy}(2, -2) = 0$,

$$C = f_{yy}(2, -2) = -2, \quad AC - B^2 > 0,$$

由判定极值的充分条件知:在点 $(2, -2)$ 处,函数取得极大值 $f(2, -2) = 8$.

3. 求函数 $f(x,y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = (6 - 2x)(4y - y^2) = 0, \\ f_y = (6x - x^2)(4 - 2y) = 0. \end{cases}$$

求得以下五组解:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 6, \\ y_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = 6, \\ y_5 = 4. \end{cases}$$

于是,得驻点 $(0,0), (0,4), (3,2), (6,0), (6,4)$.

又 $f_{xx}(x,y) = -2(4y - y^2)$,

$$f_{xy}(x,y) = 4(3-x)(2-y),$$

$$f_{yy}(x,y) = -2(6x - x^2).$$

由判定极值的充分条件知:

在点 $(0,0)$ 处, $A = f_{xx}(0,0) = 0$, $B = f_{xy}(0,0) = 24$, $C = f_{yy}(0,0) = 0$, $AC - B^2 = -24^2 < 0$,故 $f(0,0)$ 不是极值;

在点 $(0,4)$ 处, $A = f_{xx}(0,4) = 0$, $B = f_{xy}(0,4) = -24$, $C = f_{yy}(0,4) = 0$, $AC - B^2 = -(-24)^2 < 0$,故 $f(0,4)$ 不是极值;

在点(3,2)处, $A = f_{xx}(3,2) = -8 < 0$, $B = f_{xy}(3,2) = 0$, $C = f_{yy}(3,2) = -18$, $AC - B^2 = 144 > 0$, 故函数在点(3,2)处取得极大值, 极大值为 $f(3,2) = 36$;

在点(6,0)处, $A = f_{xx}(6,0) = 0$, $B = f_{xy}(6,0) = -24$, $C = f_{yy}(6,0) = 0$, $AC - B^2 = -(-24)^2 < 0$, 故 $f(6,0)$ 不是极值;

在点(6,4)处, $A = f_{xx}(6,4) = 0$, $B = f_{xy}(6,4) = 24$, $C = f_{yy}(6,4) = 0$, $AC - B^2 = -24^2 < 0$, 故 $f(6,4)$ 不是极值.

 4. 求函数 $f(x,y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1) = 0, \\ f_y = e^{2x}(2y+2) = 0, \end{cases}$$

求得驻点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

又 $A = f_{xx}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 2e > 0$, $B = f_{xy}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 0$,

$$C = f_{yy}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 2e, \quad AC - B^2 = 4e^2 > 0,$$

由判定极值的充分条件知, 在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处, 函数取得极小值

$$f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}.$$

 5. 求函数 $z = xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解 本题属条件极值问题, 易将它化为无条件极值问题.

条件 $x+y=1$ 可表示成 $y=1-x$, 代入 $z=xy$, 则问题化为求 $z=x(1-x)$ 的极大值.

由 $\frac{dz}{dx} = 1-2x = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$. 又

$$\left. \frac{d^2z}{dx^2} \right|_{x=\frac{1}{2}} = -2 < 0.$$

由一元函数取得极值的充分条件知, $x = \frac{1}{2}$ 为极大值点, 极大值为

$$z = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$

 6. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x, y , 则周长

$$S = x + y + l \quad (0 < x < l, 0 < y < l).$$

本题是求周长 S 在 $x^2 + y^2 = l^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x, y) = x + y + l + \lambda(x^2 + y^2 - l^2).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

解得 $x = y = -\frac{1}{2\lambda}$. 代入 $x^2 + y^2 = l^2$, 得 $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2l}$, 于是 $x = y = \frac{l}{\sqrt{2}}$, $(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}})$ 是唯一可能的极值点, 根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在, 所以在斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 周长最大的是等腰直角三角形.

注 条件极值的解法, 一般是采用拉格朗日乘数法求解. 但要注意利用乘数法所得到的点只是可能极值点, 究竟这些点是否为极值点以及是极大点还是极小点尚需进一步判断. 在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定. 在特殊情形下, 条件极值问题可化为无条件极值问题求解.

7. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小.

解 设水池的长为 a , 宽为 b , 高为 c , 则水池的表面积为

$$A = ab + 2ac + 2bc \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

约束条件 $abc = k$.

作拉格朗日函数 $L(a, b, c) = ab + 2ac + 2bc + \lambda(abc - k)$. 由

$$\begin{cases} L_a = b + 2c + \lambda bc = 0, \\ L_b = a + 2c + \lambda ac = 0, \\ L_c = 2a + 2b + \lambda ab = 0, \\ abc = k, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = b = \sqrt[3]{2k}, c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}, \lambda = -\sqrt[3]{\frac{32}{k}}.$$

$(\sqrt[3]{2k}, \sqrt[3]{2k}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k})$ 是唯一可能的极值点, 由问题本身可知 A 一定有最小值,

所以表面积最小的水池的长和宽都应 $\sqrt[3]{2k}$, 高为 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

8. 在平面 xOy 上求一点, 使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

解 设所求点为 (x, y) , 则此点到三直线的距离依次为: $|x|, |y|, \frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$,

三距离平方之和为

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x + 2y - 16)^2.$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x + 2y - 16) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x + 2y - 16) = 0 \end{cases}$$

求得唯一可能的极值点 $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$. 根据问题本身可知, 距离平方和最小的点必定存在, 故所求点即为 $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

9. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边长为 x , 则另一边长为 $p - x$, 假设矩形绕长为 $p - x$ 的一边旋转, 则旋转所成圆柱体的体积为 $V = \pi x^2(p - x)$. 由

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi x(p - x) - \pi x^2 = \pi x(2p - 3x) = 0,$$

求得驻点为 $x = \frac{2}{3}p$.

由于驻点唯一, 由题意又可知这种圆柱体一定有最大值, 所以当矩形的边长为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$ 时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

10. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, (x, y, z) 是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点, 则此长方体的长、宽、高分别为 $2x, 2y, 2z$, 体积为

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz.$$

令 $L(x, y, z) = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 8yz + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 8xz + 2\lambda y = 0, \\ L_z = 8xy + 2\lambda z = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4yz + \lambda x = 0, \\ 4xz + \lambda y = 0, \\ 4xy + \lambda z = 0, \end{cases}$$

解得 $x = y = z = -\frac{\lambda}{4}$, 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 得 $\lambda = -\frac{4}{\sqrt{3}}a$, 故 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ 为唯一可能的极值点. 由于内接于球且有最大体积的长方体必定存在, 所以当长方体的长、宽、高都为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ 时其体积最大.

11. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解 设椭圆上的点为 (x, y, z) , 则椭圆上的点到原点的距离平方为

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

x, y, z 满足条件: $z = x^2 + y^2, x + y + z = 1$.

作拉格朗日函数

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_y = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L_z = 2z + \lambda + \mu = 0. \end{cases} \quad (3)$$

(1) - (2), 得

$$(1 - \lambda)(x - y) = 0.$$

故有 $\lambda = 1$ 或 $x = y$.

由 $\lambda = 1 \Rightarrow \mu = 0, z = -\frac{1}{2}$, 不合题意, 故舍去.

将 $x = y$ 代入 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 1$, 得

$$z = 2x^2, 2x + z = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

解得

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad z = 2 \mp \sqrt{3}.$$

于是得到两个可能的极值点:

$$M_1\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 2 - \sqrt{3}\right), \quad M_2\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, 2 + \sqrt{3}\right).$$

由题意可知这种距离的最大值和最小值一定存在, 所以距离的最大值和最小值分别在这两点处取得. 而

$$2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2 \mp \sqrt{3})^2 = 9 \mp 5\sqrt{3},$$

故最大值与最小值分别为

$$d_{\max} = d_{M_2} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}, \quad d_{\min} = d_{M_1} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

 12. 设有一圆板占有平面闭区域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. 该圆板被加热, 以致在点 (x, y) 的温度是 $T = x^2 + 2y^2 - x$, 求该圆板的最热点和最冷点.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y = 0, \end{cases}$$

求得驻点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. $T_1 = T \Big|_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)} = -\frac{1}{4}$.

在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上,

$$T = 2 - (x^2 + x) = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 有边界上的最大值 $T_2 = \frac{9}{4}$, $x = 1$ 时, 有边界上的最小值 $T_3 = 0$.

比较 T_1, T_2 及 T_3 的值知, 最热点在 $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $T_{\max} = \frac{9}{4}$, 最冷点在 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

$$T_{\min} = -\frac{1}{4}.$$

13. 形状为椭球 $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16$ 的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 1 小时后在探测器的点 (x, y, z) 处的温度 $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, 求探测器表面最热的点.

解 作拉格朗日函数

$$L = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 16x + 8\lambda x = 0, & (1) \\ L_y = 4z + 2\lambda y = 0, & (2) \\ L_z = 4y - 16 + 8\lambda z = 0. & (3) \end{cases}$$

由(1)得 $x = 0$ 或 $\lambda = -2$.

若 $\lambda = -2$, 代入(2)(3), 得 $y = z = -\frac{4}{3}$. 再将 $y = z = -\frac{4}{3}$ 代入约束条件

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16, \quad (4)$$

得 $x = \pm \frac{4}{3}$. 于是得到两个可能的极值点: $M_1\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $M_2\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

若 $x = 0$, 由(2)(3)(4)解得 $\lambda = 0, y = 4, z = 0$; $\lambda = \sqrt{3}, y = -2, z = \sqrt{3}$; $\lambda = -\sqrt{3}, y = -2, z = -\sqrt{3}$. 于是得到另外三个可能极值点: $M_3(0, 4, 0)$, $M_4(0, -2, \sqrt{3})$, $M_5(0, -2, -\sqrt{3})$.

比较 T 在上述五个可能极值点处的数值知: $T|_{M_1} = T|_{M_2} = \frac{1928}{3}$ 为最大, 故探

测器表面最热的点为 $M\left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

* 习题 9-9

二元函数的泰勒公式

1. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 在点 $(1, -2)$ 的泰勒公式.

$$\text{解 } f(1, -2) = 5, f_x(1, -2) = (4x - y - 6) \big|_{(1, -2)} = 0,$$

$$f_y(1, -2) = (-x - 2y - 3) \big|_{(1, -2)} = 0,$$

$$f_{xx}(1, -2) = 4, f_{xy}(1, -2) = -1, f_{yy}(1, -2) = -2.$$

函数为 2 次多项式, 三阶及三阶以上的各偏导数均为零. 又

$$h = x - 1, \quad k = y + 2.$$

将以上各项代入泰勒公式, 便得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, -2) + (x-1)f_x(1, -2) + (y+2)f_y(1, -2) + \frac{1}{2!}[(x-1)^2 \cdot \\ &\quad f_{xx}(1, -2) + 2(x-1)(y+2)f_{xy}(1, -2) + (y+2)^2 f_{yy}(1, -2)] \\ &= 5 + \frac{1}{2}[4(x-1)^2 - 2(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2] \\ &= 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2. \end{aligned}$$

 2. 求函数 $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$ 在点 $(0, 0)$ 的三阶泰勒公式.

$$\text{解 } f_x(x, y) = e^x \ln(1+y), \quad f_y(x, y) = \frac{e^x}{1+y},$$

$$f_{xx}(x, y) = e^x \ln(1+y), \quad f_{xy}(x, y) = \frac{e^x}{1+y},$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{e^x}{(1+y)^2}, \quad f_{xxx}(x, y) = e^x \ln(1+y),$$

$$f_{yyy}(x, y) = \frac{2e^x}{(1+y)^3}.$$

于是

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0, 0) = hf_x(0, 0) + kf_y(0, 0) = k,$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0, 0) &= h^2 f_{xx}(0, 0) + 2hk f_{xy}(0, 0) + k^2 f_{yy}(0, 0) \\ &= 2hk - k^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0, 0) &= h^3 f_{xxx}(0, 0) + 3h^2 k f_{xxy}(0, 0) + 3hk^2 f_{xyy}(0, 0) \\ &\quad + k^3 f_{yyy}(0, 0) \\ &= 3h^2 k - 3hk^2 + 2k^3. \end{aligned}$$

又

$$f(0, 0) = 0, \quad h = x, \quad k = y.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式, 便得

$$e^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + R_3,$$

其中

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \frac{1}{4!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 f(\theta h, \theta k) \right]_{h=x, k=y} \\
 &= \frac{e^{\theta x}}{24} \left[x^4 \ln(1 + \theta y) + \frac{4x^3 y}{1 + \theta y} - \frac{6x^2 y^2}{(1 + \theta y)^2} + \frac{8xy^3}{(1 + \theta y)^3} - \frac{6y^4}{(1 + \theta y)^4} \right] \quad (0 < \theta < 1).
 \end{aligned}$$

3. 求函数 $f(x, y) = \sin x \sin y$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 的二阶泰勒公式.

解

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= \cos x \sin y, & f_y(x, y) &= \sin x \cos y, \\
 f_{xx}(x, y) &= -\sin x \sin y, & f_{xy}(x, y) &= \cos x \cos y, \\
 f_{yy}(x, y) &= -\sin x \sin y, & f_{xx}(x, y) &= -\cos x \sin y, \\
 f_{xy}(x, y) &= -\sin x \cos y, & f_{xy}(x, y) &= -\cos x \sin y, \\
 f_{yyy}(x, y) &= -\sin x \cos y.
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= hf_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + kf_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k, \\
 \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= h^2 f_{xx}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + 2hkf_{xy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + k^2 f_{yy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= -\frac{1}{2}h^2 + hk - \frac{1}{2}k^2.
 \end{aligned}$$

又

$$f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, \quad h = x - \frac{\pi}{4}, \quad k = y - \frac{\pi}{4}.$$

将以上各项代入二阶泰勒公式, 便得

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right] + R_2 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right] + R_2,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \frac{1}{3!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(\xi, \eta) \right]_{h=x-\frac{\pi}{4}, k=y-\frac{\pi}{4}} \\
 &= -\frac{1}{6} \left[\cos \xi \sin \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + 3 \sin \xi \cos \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\
 &\quad \left. 3 \cos \xi \sin \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin \xi \cos \eta \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right].
 \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{\pi}{4} + \theta \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \quad \eta = \frac{\pi}{4} + \theta \left(y - \frac{\pi}{4} \right), \quad 0 < \theta < 1.$$

4. 利用函数 $f(x, y) = x^y$ 的三阶泰勒公式, 计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

解 先求函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 1)$ 的三阶泰勒公式.

$$f_x(1, 1) = yx^{y-1} \big|_{(1,1)} = 1, \quad f_y(1, 1) = x^y \ln x \big|_{(1,1)} = 0,$$

$$f_{xx}(1, 1) = y(y-1)x^{y-2} \big|_{(1,1)} = 0,$$

$$f_{xy}(1, 1) = (x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x) \big|_{(1,1)} = 1,$$

$$f_{yy}(1, 1) = x^y \ln^2 x \big|_{(1,1)} = 0,$$

$$f_{xxx}(1, 1) = y(y-1)(y-2)x^{y-3} \big|_{(1,1)} = 0,$$

$$f_{xxy}(1, 1) = [(2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x] \big|_{(1,1)} = 1,$$

$$f_{xyy}(1, 1) = (2x^{y-1} \ln x + yx^{y-1} \ln^2 x) \big|_{(1,1)} = 0,$$

$$f_{yyy}(1, 1) = x^y \ln^3 x \big|_{(1,1)} = 0.$$

又

$$f(1, 1) = 1, \quad h = x - 1, \quad k = y - 1.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式, 使得

$$\begin{aligned} x^y &= 1 + (x-1) + \frac{1}{2!} [2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!} [3(x-1)^2(y-1)] + R_3 \\ &= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + R_3. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} 1.1^{1.02} &\approx 1 + 0.1 + 0.1 \times 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.1^2 \times 0.02 \\ &= 1 + 0.1 + 0.002 + 0.0001 = 1.1021. \end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x, y) = e^{x+y}$ 在点 $(0, 0)$ 的 n 阶泰勒公式.

解 $f(0, 0) = 1$, $f_x(0, 0) = e^{x+y} \big|_{(0,0)} = 1$, $f_y(0, 0) = e^{x+y} \big|_{(0,0)} = 1, \dots$,

$$f_{x^m y^n}^{(n)}(0, 0) = e^{x+y} \big|_{(0,0)} = 1 \quad (m=0, 1, \dots, n).$$

又

$$h = x, \quad k = y.$$

将以上各项代入 n 阶泰勒公式, 使得

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\ &+ \dots + \frac{1}{n!}(x+y)^n + R_n = \sum_{k=0}^n \frac{(x+y)^k}{k!} + R_n, \end{aligned}$$

其中

$$R_n = \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)} \quad (0 < \theta < 1).$$

* 习题 9-10

最小二乘法

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为 p , 其熔解温度($^{\circ}\text{C}$)为 θ , 由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

$p/\%$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
$\theta/^{\circ}\text{C}$	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta = ap + b$.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和, 即

$$M = \sum_{i=1}^6 [\theta_i - (ap_i + b)]^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = - \sum_{i=1}^6 2p_i [\theta_i - (ap_i + b)] = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = - \sum_{i=1}^6 2 [\theta_i - (ap_i + b)] = 0. \end{cases}$$

整理, 得

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^6 p_i^2 + b \sum_{i=1}^6 p_i = \sum_{i=1}^6 \theta_i p_i, \\ a \sum_{i=1}^6 p_i + 6b = \sum_{i=1}^6 \theta_i. \end{cases}$$

计算, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 p_i^2 &= 28\,365.28, & \sum_{i=1}^6 p_i &= 396.6, \\ \sum_{i=1}^6 \theta_i p_i &= 101\,176.3, & \sum_{i=1}^6 \theta_i &= 1\,458. \end{aligned}$$

代入方程组, 得

$$\begin{cases} 28\,365.28a + 396.6b = 101\,176.3, \\ 396.6a + 6b = 1\,458. \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\,802.5}{2\,150.02} = 2.234, \\ b &= \frac{572.0}{6} = 95.33. \end{aligned}$$

所以经验公式为 $\theta = 2.234p + 95.33$.

2. 已知一组实验数据为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. 现若假定经验公式是

$$y = ax^2 + bx + c.$$

试按最小二乘法建立 a, b, c 应满足的三元一次方程组.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和, 即

$$M = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0. \end{cases}$$

整理, 得 a, b, c 应满足的三元一次方程组如下:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

总习题九

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是 $f(x, y)$ 在该点连续的_____条件, $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件;

(2) $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件, $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的_____条件;

(3) $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 存在且连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件;

(4) 函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的_____条件.

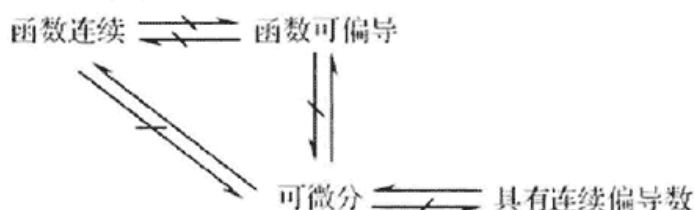
解 (1) 充分, 必要.

(2) 必要, 充分.

(3) 充分.

(4) 充分.

注 本题结果给出了二元函数连续、可偏导(两个偏导数均存在)、可微分及具有连续偏导数之间的联系,用图表可表示为



2. 下题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义,且 $f_x(0, 0) = 3, f_y(0, 0) = -1$, 则有().

(A) $dz|_{(0,0)} = 3dx - dy$

(B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 $(3, -1, 1)$

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(1, 0, 3)$

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(3, 0, 1)$

解 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数存在,不一定可微分,故(A)不对.

由于函数存在偏导数不能保证可微分,从而不能保证曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处存在切平面,因而(B)不对;若 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处存在连续偏导数,曲面在该点处有切平面,其法向量是 $(3, -1, -1)$,而不是 $(3, -1, 1)$,故(B)也不对.

取 x 为参数,则曲线 $x = x, y = 0, z = f(x, 0)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的一个切向量为 $(1, 0, 3)$,故(C)正确.

3. 求函数 $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ 的定义域,并求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x, y)$.

解 函数的定义域为 $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leq 4x\}$.

因为点 $(\frac{1}{2}, 0) \in D$, $f(x, y)$ 为初等函数,所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x, y) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{\ln \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\ln 3 - \ln 4}.$$

*4. 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 不存在.

证 取两条趋于 $(0, 0)$ 的路径, $c_1: x = 0, c_2: y^2 = x$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_1}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y^2=x}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

由于 (x, y) 分别沿 c_1, c_2 趋于 $(0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限不相等, 故 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 不存在.

5. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

求 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$.

解 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

当 $x^2 + y^2 = 0$ 时,

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

故

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z = \ln(x + y^2)$; (2) $z = x^y$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x + y^2) - 4y^2}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x + y^2} \right) = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}.$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x.$$

7. 求函数 $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.01, \Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z = \frac{2.01 \cdot 1.03}{2.01^2 - 1.03^2} - \frac{2}{3} = 0.03.$

又 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(y^3 + x^2 y)}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3 + xy^2}{(x^2 - y^2)^2},$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} = -\frac{5}{9}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} = \frac{10}{9}.$$

故 $dz \Big|_{\substack{x=2, \Delta x=0.01 \\ y=1, \Delta y=0.03}} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} \cdot \Delta y = 0.03.$

8. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明: $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且偏导数存在, 但不可微分.

证 因为

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

又 $f(0, 0) = 0$, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$, 即 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续.

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

$$\Delta z - [f_x(0, 0) \Delta x + f_y(0, 0) \Delta y] = \frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在, 但不可微分.

9. 设 $u = x^y$, 而 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 都是可微函数, 求 $\frac{du}{dt}$.

解 $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = yx^{y-1} \cdot \varphi'(t) + x^y \ln x \cdot \psi'(t).$

10. 设 $z = f(u, v, w)$ 具有连续偏导数, 而

$$u = \eta - \zeta, \quad v = \zeta - \xi, \quad w = \xi - \eta,$$

求 $\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w}, \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial w}, \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

11. 设 $z = f(u, x, y)$, $u = xe^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_x = f_u \cdot e^y + f_x, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_u \cdot e^y + f_x) = \left(\frac{\partial}{\partial y}f_u\right) \cdot e^y + f_u \cdot e^y + \frac{\partial}{\partial y}f_x \\ &= \left(f_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uy}\right)e^y + f_u \cdot e^y + \left(f_{xu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{xy}\right) \\ &= (f_{uu} \cdot xe^y + f_{uy})e^y + f_u \cdot e^y + f_{xu} \cdot xe^y + f_{xy} \\ &= xe^{2y}f_{uu} + e^y f_{uy} + xe^y f_{xu} + f_{xy} + e^y f_u.\end{aligned}$$

12. 设 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}.$

分别在 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ 的两端对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

由以上方程组解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v.$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-u} (v \cos v - u \sin v).$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}.$$

分别在 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ 的两端对 y 求偏导数, 得

$$\begin{cases} e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

由以上方程组解得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v.$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-u} (u \cos v + v \sin v).$$

 13. 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b \theta$ 在点 $(a, 0, 0)$ 处的切线及法平面方程.

解
$$\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta, \quad \frac{dz}{d\theta} = b.$$

点 $(a, 0, 0)$ 所对应的参数 $\theta = 0$, 故曲线在给定点的切向量

$$\boldsymbol{T} = (0, a, b).$$

于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b},$$

即

$$\begin{cases} x = a, \\ by - az = 0. \end{cases}$$

法平面方程为

$$a(y-0) + b(z-0) = 0,$$

即

$$ay + bz = 0.$$

 14. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 并写出这法线的方程.

解 设所求点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, 曲面在该点处的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (y_0, x_0, -1)$, 平面的法向量为 $(1, 3, 1)$.

按题意, $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面, 故有

$$\frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1}.$$

求得 $x_0 = -3, y_0 = -1, z_0 = x_0 y_0 = 3$. 于是所求点为 $M(-3, -1, 3)$, 法线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

 15. 设 $\boldsymbol{e}_l = (\cos \theta, \sin \theta)$, 求函数

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

在点(1,1)沿方向 l 的方向导数,并分别确定角 θ ,使这导数有(1)最大值;(2)最小值;(3)等于0.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} &= 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 1. \\ \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(1,1)} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} \sin \theta = \cos \theta + \sin \theta.\end{aligned}$$

因为 $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 所以

(1) 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时,方向导数最大,其最大值为 $\sqrt{2}$.

(2) 当 $\theta = \frac{5}{4}\pi$ 时,方向导数最小,其最小值为 $-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 或 $\frac{7}{4}\pi$ 时,方向导数为 0.

 16. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点 M_0 处的沿外法线方向的一个向量为 $\mathbf{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$,

$$\begin{aligned}e_n &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right). \\ \frac{\partial z}{\partial n} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \left(2x_0 \cdot \frac{x_0}{a^2} + 2y_0 \cdot \frac{y_0}{b^2} + 2z_0 \cdot \frac{z_0}{c^2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}.\end{aligned}$$

 17. 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设交线上的点为 $M(x, y, z)$, 它到 xOy 面上距离的平方为 z^2 . 问题就成为求函数 z^2 在约束条件 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最小值问题. 作拉格朗日函数

$$L = z^2 + \lambda \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1\right) + \mu(x^2 + y^2 - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0, \\ L_y = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0, \\ L_z = 2z + \frac{\lambda}{5} = 0. \end{cases}$$

又由约束条件,有

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

解此方程组,得 $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}, z = \frac{35}{12}$. 于是,得可能的极值点 $M_0\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12}\right)$. 由问题本身可知,距离最短的点必定存在,因此 M_0 就是所求的点.

 18. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面,使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点,并求此最小体积.

解 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$,

$$\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right).$$

曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

于是,切平面在三个坐标轴上的截距依次为 $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$, 切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的条件下,求 V 的最小值,即求分母 xyz 的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

(1) $\cdot x + (2) \cdot y + (3) \cdot z$, 并由约束条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 得

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

从而

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是, 得可能极值点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$. 由此问题的性质知, 所求的切点为

$M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$, 四面体的最小体积为

$$V_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

 19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2 , 销售量分别为 q_1 和 q_2 , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2).$$

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

解法一 总收入函数为

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2,$$

总利润函数为

$$L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 12p_2 - 1395.$$

由极值的必要条件, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组, 得 $p_1 = 80, p_2 = 120$.

由问题的实际意义可知,厂家获得总利润最大的市场售价必定存在,故当 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时,厂家所获得的总利润最大,其最大总利润为

$$L \Big|_{p_1=80, p_2=120} = 605.$$

解法二 两个市场的价格函数分别为

$$p_1 = 120 - 5q_1, \quad p_2 = 200 - 20q_2,$$

总收入函数为

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = (120 - 5q_1)q_1 + (200 - 20q_2)q_2,$$

总利润函数为

$$\begin{aligned} L = R - C &= (120 - 5q_1)q_1 + (200 - 20q_2)q_2 - [35 + 40(q_1 + q_2)] \\ &= 80q_1 - 5q_1^2 + 160q_2 - 20q_2^2 - 35. \end{aligned}$$

由极值的必要条件,得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = 80 - 10q_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = 160 - 40q_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得 $q_1 = 8, q_2 = 4$.

由问题的实际意义可知,当 $q_1 = 8, q_2 = 4$, 即 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时,厂家所获得的总利润最大,其最大总利润为

$$L \Big|_{q_1=8, q_2=4} = 605.$$

20. 设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面,其底部所占的闭区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$, 小山的高度函数为 $h = f(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.

(1) 设 $M(x_0, y_0) \in D$, 问 $f(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点,也就是说,要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出(1)中的 $g(x, y)$ 达到最大值的点. 试确定攀岩起点的位置.

解 (1) 由梯度与方向导数的关系知, $h = f(x, y)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处沿梯度

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (y_0 - 2x_0)\mathbf{i} + (x_0 - 2y_0)\mathbf{j}$$

方向的方向导数最大,方向导数的最大值为该梯度的模,所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}.$$

(2) 欲在 D 的边界上求 $g(x, y)$ 达到最大值的点,只需求 $F(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$ 达到最大值的点. 因此,作拉格朗日函数

$$L = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, \\ L_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

又由约束条件,有

$$75 - x^2 - y^2 + xy = 0. \quad (3)$$

(1) + (2), 得

$$(x + y)(2 - \lambda) = 0,$$

解得 $y = -x$ 或 $\lambda = 2$.

若 $\lambda = 2$, 则由(1)得 $y = x$, 再由(3)得 $x = y = \pm 5\sqrt{3}$.

若 $y = -x$, 则由(3)得 $x = \pm 5, y = \mp 5$.

于是得到四个可能的极值点:

$$M_1(5, -5), \quad M_2(-5, 5), \quad M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), \quad M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}).$$

由于 $F(M_1) = F(M_2) = 450, F(M_3) = F(M_4) = 150$, 故 $M_1(5, -5)$ 或 $M_2(-5, 5)$ 可作为攀岩的起点.

第十章 重积分

习题 10-1

二重积分的概念与性质

1. 设有一平面薄板(不计其厚度),占有 xOy 面上的闭区域 D ,薄板上分布有面密度为 $\mu = \mu(x, y)$ 的电荷,且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表达该薄板上的全部电荷 Q .

解 用一组曲线网将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$,其面积也记为 $\Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$. 任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$,则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷 $\Delta Q_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$. 通过求和、取极限,便得到该板上的全部电荷为

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D \mu(x, y) d\sigma,$$

其中 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta\sigma_i|$ 的直径.

注 以上解题过程也可用元素法简化叙述如下:

设想用曲线网将 D 分成 n 个小闭区域,取出其中任意一个记作 $d\sigma$ (其面积也记作 $d\sigma$), (x, y) 为 $d\sigma$ 上一点,则 $d\sigma$ 上分布的电荷近似等于 $\mu(x, y) d\sigma$, 记作

$$dQ = \mu(x, y) d\sigma \quad (\text{称为电荷元素}),$$

以 dQ 作为被积表达式,在 D 上作重积分,即得所求的电荷为

$$Q = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

2. 设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$; 又 $I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. 试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 由二重积分的几何意义知, I_1 表示底为 D_1 、顶为曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积; I_2 表示底为 D_2 、顶为曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积(图 10-1). 由于位于 D_1 上方的曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称,故 yOz 面和 zOx 面将 Ω_1 分成四个等积的部分,其中位于第一卦限的部分即为 Ω_2 . 由此可知

$$I_1 = 4I_2.$$

注 (1) 本题也可利用被积函数和积分区域的对称性来解答. 设 $D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$. 由于 D_1 关于 y 轴对称,被积函数 $(x^2 + y^2)^3$ 关于 x 是偶函

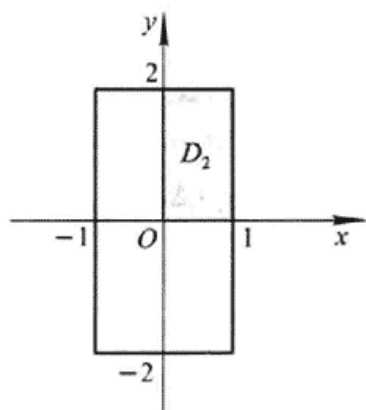


图 10-1

数,故

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2 \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma.$$

又由于 D_3 关于 x 轴对称,被积函数 $(x^2 + y^2)^3$ 关于 y 是偶函数,故

$$\iint_{D_3} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2 \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2I_2.$$

从而得

$$I_1 = 4I_2.$$

(2) 利用对称性来计算二重积分还有以下两个结论值得注意:

如果积分区域 D 关于 x 轴对称,而被积函数 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数,即 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0;$$

如果积分区域 D 关于 y 轴对称,而被积函数 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数,即 $f(-x, y) = -f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0.$$

例 3. 利用二重积分定义证明:

(1) $\iint_D d\sigma = \sigma$ (其中 σ 为 D 的面积);

(2) $\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma$ (其中 k 为常数);

(3) $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 为两个

无公共内点的闭区域.

证 (1) 由于被积函数 $f(x, y) \equiv 1$, 故由二重积分定义得

$$\iint_D d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \sigma.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \iint_D kf(x, y) d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \\ &= k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = k \iint_D f(x, y) d\sigma. \end{aligned}$$

(3) 因为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上可积, 故不论把 D 怎样分割, 积分和的极限总是不变的. 因此在分割 D 时, 可以使 D_1 和 D_2 的公共边界永远是一条分割线. 这样 $f(x, y)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上的积分和就等于 D_1 上的积分和加 D_2 上的积分和, 记为

$$\sum_{D_1 \cup D_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \sum_{D_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \sum_{D_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

令所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

例 4. 试确定积分区域 D , 使二重积分 $\iint_D (1 - 2x^2 - y^2) dx dy$ 达到最大值.

解 由二重积分的性质可知, 当积分区域 D 包含了所有使被积函数 $1 - 2x^2 - y^2$ 大于等于零的点, 而不包含使被积函数 $1 - 2x^2 - y^2$ 小于零的点, 即当 D 是椭圆 $2x^2 + y^2 = 1$ 所围的平面闭区域时, 此二重积分的值达到最大.

例 5. 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小:

(1) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 D 是由 x 轴、 y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;

(2) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ 所围成;

(3) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 D 是三角形闭区域, 三顶点分别为 $(1, 0), (1, 1), (2, 0)$;

(4) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上, $0 \leq x+y \leq 1$, 故有

$$(x+y)^3 \leq (x+y)^2.$$

根据二重积分的性质 4, 可得

$$\iint_D (x+y)^3 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

(2) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x, y) \mid x+y \geq 1\}$ 内, 故在 D 上有 $(x+y)^2 \leq (x+y)^3$. 从而 $\iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma$.

(3) 由于积分区域 D 位于条形区域 $\{(x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 2\}$ 内, 故知区域 D 上的点满足 $0 \leq \ln(x + y) \leq 1$, 从而有 $[\ln(x + y)]^2 \leq \ln(x + y)$. 因此

$$\iint_D [\ln(x + y)]^2 d\sigma \leq \iint_D \ln(x + y) d\sigma.$$

(4) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x, y) \mid x + y \geq e\}$ 内, 故在 D 上有 $\ln(x + y) \geq 1$, 从而 $[\ln(x + y)]^2 \geq \ln(x + y)$. 因此

$$\iint_D [\ln(x + y)]^2 d\sigma \geq \iint_D \ln(x + y) d\sigma.$$

 6. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I = \iint_D xy(x + y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(2) $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$;

(3) $I = \iint_D (x + y + 1) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;

(4) $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 从而 $0 \leq xy(x + y) \leq 2$. 又 D 的面积等于 1, 因此

$$0 \leq \iint_D xy(x + y) d\sigma \leq 2.$$

(2) 在积分区域 D 上, $0 \leq \sin x \leq 1, 0 \leq \sin y \leq 1$, 从而 $0 \leq \sin^2 x \sin^2 y \leq 1$, 又 D 的面积等于 π^2 , 因此

$$0 \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \pi^2.$$

(3) 在积分区域 D 上有 $1 \leq x + y + 1 \leq 4$, D 的面积等于 2, 因此

$$2 \leq \iint_D (x + y + 1) d\sigma \leq 8.$$

(4) 因为在积分区域 D 上有 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 所以有

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 4(x^2 + y^2) + 9 \leq 25.$$

又 D 的面积等于 4π , 因此

$$36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi.$$

习题 10-2

二重积分的计算法

 1. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\};$$

$$(2) \iint_D (3x + 2y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由两坐标轴及直线 } x + y = 2 \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(3) \iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$(4) \iint_D x \cos(x + y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是顶点分别为 } (0, 0), (\pi, 0) \text{ 和 } (\pi, \pi) \text{ 的三角形闭}$$

区域.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \quad \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 \left(2x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(2) D 可用不等式表示为

$$0 \leq y \leq 2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 2y) d\sigma &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x + 2y) dy \\ &= \int_0^2 \left[3xy + y^2 \right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma &= \int_0^1 dy \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} + x^3y + y^3x \right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + y + y^3 \right) dy = 1. \end{aligned}$$

(4) D 可用不等式表示为

$$0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos(x + y) d\sigma &= \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x + y) dy \\ &= \int_0^\pi x \left[\sin(x + y) \right]_0^x dx = \int_0^\pi x (\sin 2x - \sin x) dx \\ &= \int_0^\pi x d \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \\ &= \left[x \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \pi \left(-1 - \frac{1}{2} \right) - 0 = -\frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

 2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

- (1) $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y = \sqrt{x}, y = x^2$ 所围成的闭区域;
- (2) $\iint_D xy^2d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;
- (3) $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
- (4) $\iint_D (x^2 + y^2 - x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = 2, y = x$ 及 $y = 2x$ 所围成的闭区域.

解 (1) D 可用不等式表示为

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ (图 10-2)}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D x\sqrt{y}d\sigma &= \int_0^1 xdx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{y}dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x \left[y^{\frac{3}{2}} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (x^{\frac{7}{4}} - x^4) dx = \frac{6}{55}. \end{aligned}$$

(2) D 可用不等式表示为

$$0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, \quad -2 \leq y \leq 2 \text{ (图 10-3)},$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2d\sigma &= \int_{-2}^2 y^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xdx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 y^2 (4-y^2) dy = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

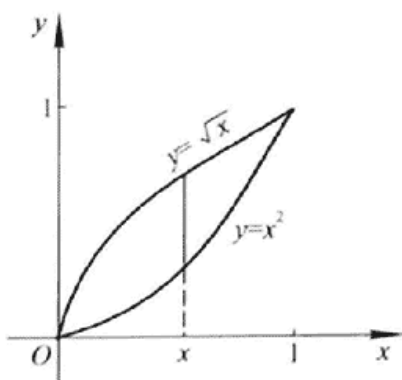


图 10-2

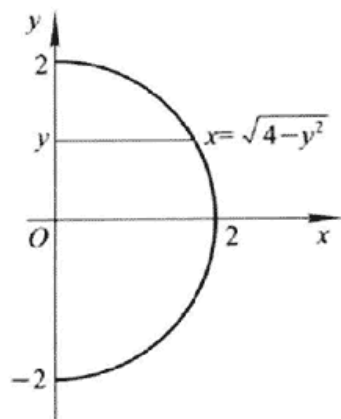


图 10-3

(3) 如图 10-4, $D = D_1 \cup D_2$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid -x-1 \leq y \leq x+1, -1 \leq x \leq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x-1 \leq y \leq -x+1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
 \iint_D e^{x+y} d\sigma &= \iint_{D_1} e^{x+y} d\sigma + \iint_{D_2} e^{x+y} d\sigma \\
 &= \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy \\
 &= \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1}) dx \\
 &= e - e^{-1}.
 \end{aligned}$$

(4) $D: \frac{y}{2} \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 2$ (图 10-5), 故

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2 + y^2 - x) dx \\
 &= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{y}{2}}^y dy \\
 &= \int_0^2 \left(\frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{13}{6}.
 \end{aligned}$$

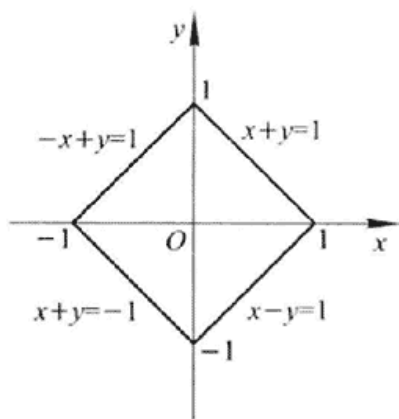


图 10-4

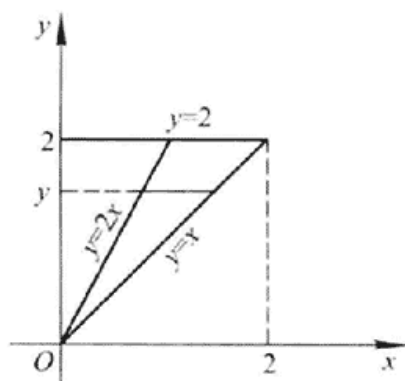


图 10-5

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x,y) dx dy$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积, 即 $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, 积分区域 $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right].$$

证
$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx.$$

在上式右端的第一次单积分 $\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy$ 中, $f_1(x)$ 与积分变量 y 无关, 可视为常数提到积分号外, 因此上式右端等于

$$\int_a^b f_1(x) \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right] dx.$$

而在这个积分中, 由于 $\int_c^d f_2(y) dy$ 为常数, 故又可提到积分号外, 从而得到

$$\begin{aligned}\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy &= \left[\int_c^d f_2(y) dy \right] \cdot \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \\ &= \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right].\end{aligned}$$

证毕.

4. 化二重积分

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域 D 是:

- (1) 由直线 $y = x$ 及抛物线 $y^2 = 4x$ 所围成的闭区域;
- (2) 由 x 轴及半圆周 $x^2 + y^2 = r^2 (y \geq 0)$ 所围成的闭区域;
- (3) 由直线 $y = x, x = 2$ 及双曲线 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 所围成的闭区域;
- (4) 环形闭区域 $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解 (1) 直线 $y = x$ 及抛物线 $y^2 = 4x$ 的交点为 $(0, 0)$ 和 $(4, 4)$ (图 10-6). 于是

$$I = \int_0^4 dx \int_x^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy,$$

或

$$I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x, y) dx.$$

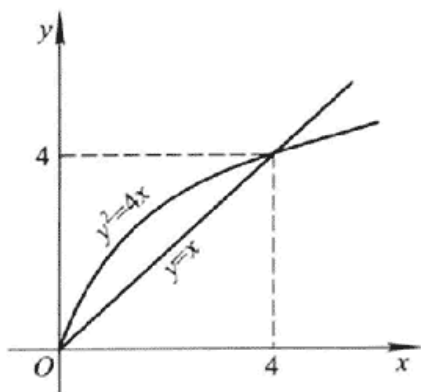


图 10-6

(2) 将 D 用不等式表示为 $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}, -r \leq x \leq r$, 于是可将 I 化为如下的先对 y 、后对 x 的二次积分:

$$I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y) dy;$$

如将 D 用不等式表示为 $-\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2}, 0 \leq y \leq r$, 则可将 I 化为如下的先对 x 、后对 y 的二次积分:

$$I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y) dx.$$

(3) 如图 10-7, 三条边界曲线两两相交, 先求得 3 个交点为 $(1,1)$, $(2, \frac{1}{2})$ 和 $(2,2)$. 于是

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x,y) dy,$$

或

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y) dx.$$

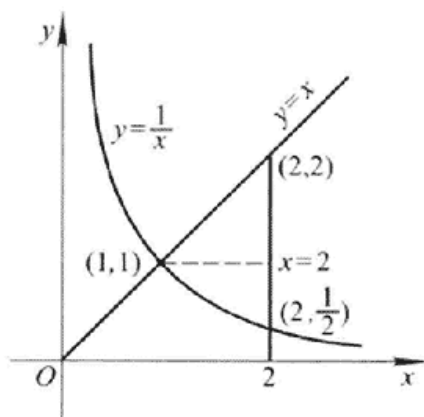


图 10-7

注 本题说明, 将二重积分化为二次积分时, 需注意根据积分区域的边界曲线的情况, 选取恰当的积分次序. 本题中的积分区域 D 的上、下边界曲线均分别由一个方程给出, 而左边界曲线却分为两段, 由两个不同的方程给出, 在这种情况下采取先对 y 、后对 x 的积分次序比较有利, 这样只需做一个二次积分, 而如果采用相反的积分次序则需计算两个二次积分.

需要指出, 选择积分次序时, 还需考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特点. 具体例子可见教材下册第 144 页上的例 2.

(4) 将 D 按图 10-8(a) 和图 10-8(b) 的两种不同方式划分为 4 块, 分别得

$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \\ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy,$$

和

$$I = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \\ \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx.$$

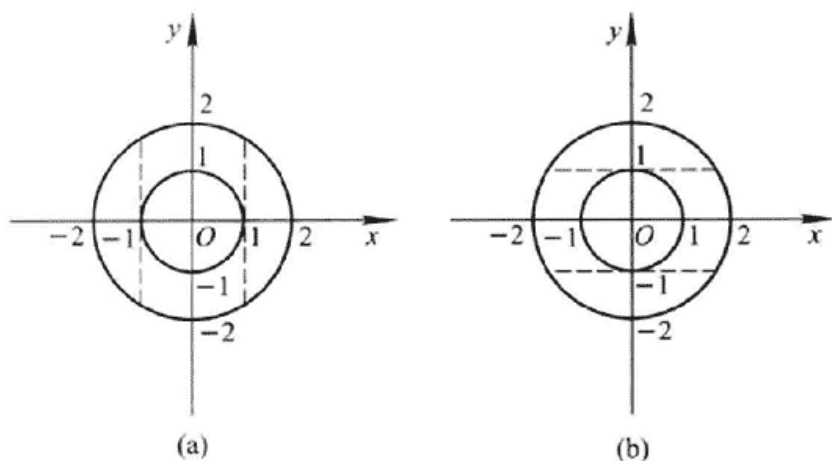


图 10-8

5. 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y = x, y = a$ 及 $x = b (b > a)$ 所围成的闭区域, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

证 等式两端的二次积分均等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 因而它们相等.

6. 改换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

$$(6) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin \frac{x}{2}} f(x, y) dy.$$

解 (1) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$. D 可改写为 $\{(x, y) \mid x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ (图 10-9), 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$. 又 D 可表示为 $\{(x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$ (图 10-10), 因此

$$\text{原式} = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

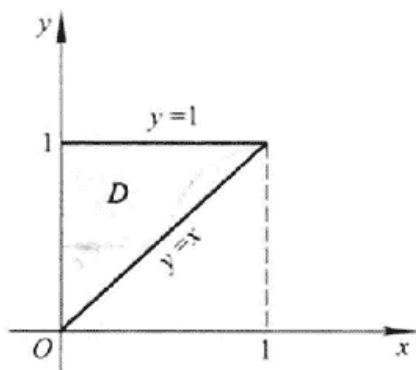


图 10-9

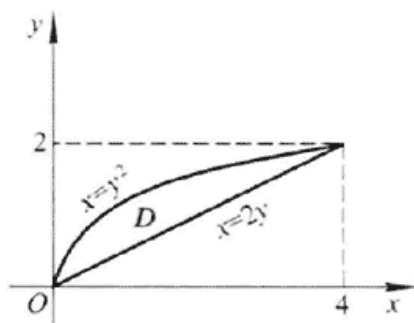


图 10-10

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x,y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$ (图 10-11), 因此

$$\text{原式} = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy.$$

(4) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x,y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 1 \leq x \leq 2\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y) \mid 2-y \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$ (图 10-12), 故

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx.$$

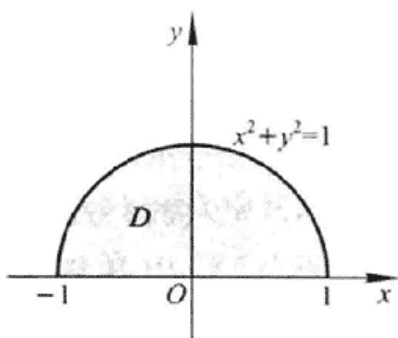


图 10-11

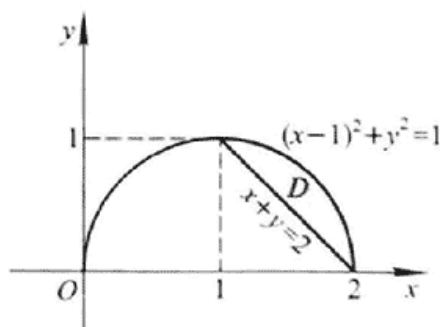


图 10-12

(5) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x,y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y) \mid e^y \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1\}$ (图 10-13), 故

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y) dx.$$

(6) 如图 10-14, 将积分区域 D 表示为 $D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 = \{(x,y) \mid \arcsin y \leq x \leq$

$\pi - \arcsin y, 0 \leq y \leq 1$ ①, $D_2 = \{(x, y) \mid -2\arcsin y \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 0\}$. 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$$

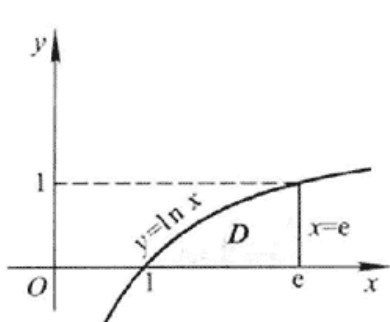


图 10-13

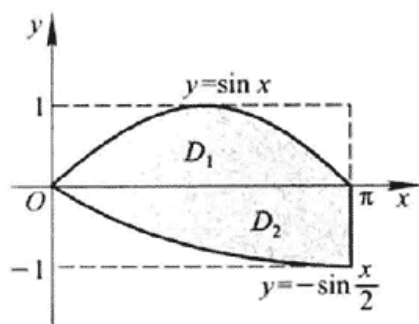


图 10-14

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x + y = 2$, $y = x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$, 求该薄片的质量.

解 D 如图 10-15 所示. 所求薄片的质量

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2 \right]_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3}y^3 \right] dy \\ &= \left[-\frac{1}{12}(2-y)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{7}{12}y^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

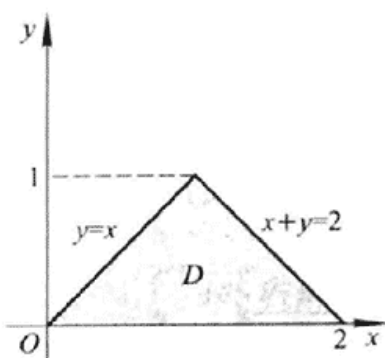


图 10-15

8. 计算由四个平面 $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及 $2x + 3y + z = 6$ 截得的立体的体积.

① 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $y = \sin x$ 的反函数是 $x = \arcsin y$. 而当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $\pi - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 于是

是由 $y = \sin x = \sin(\pi - x)$ 可得 $\pi - x = \arcsin y$, 从而得反函数 $x = \pi - \arcsin y$.

解 此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 顶是曲面 $z = 6 - 2x - 3y$ (图 10-16), 因此所求立体的体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6 - 2x - 3y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (6 - 2x - 3y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

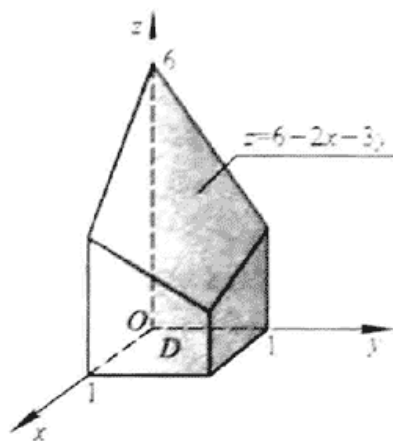


图 10-16

9. 求由平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2 + y^2 = 6 - z$ 截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$, 顶是曲面 $z = 6 - (x^2 + y^2)$ (图 10-17), 故体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [6 - (x^2 + y^2)] dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6 - x^2 - y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left[6(1-x) - x^2 + x^3 - \frac{1}{3}(1-x)^3 \right] dx \\ &= \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

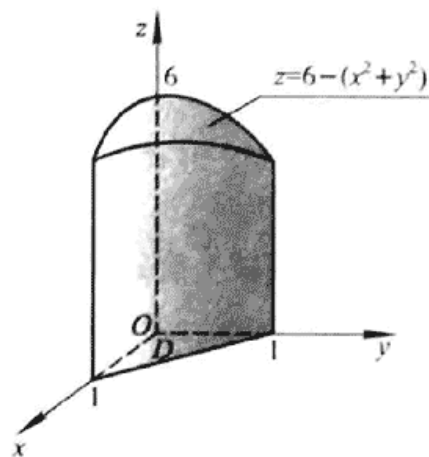


图 10-17

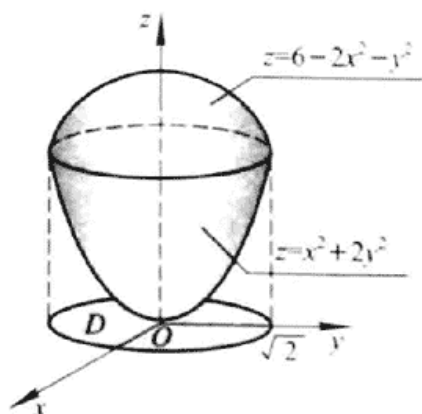


图 10-18

10. 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2 + y^2 = 2$, 故所求立体在 xOy 面上的投影区域为

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \text{ (图 10-18).}$$

所求立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6 - 2x^2 - y^2) d\sigma - \iint_D (x^2 + 2y^2) d\sigma \\ &= \iint_D (6 - 3x^2 - 3y^2) d\sigma = \iint_D (6 - 3\rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3\rho^2) \rho d\rho = 6\pi. \end{aligned}$$

注 求类似于第 8, 9, 10 题中这样的立体体积时, 并不一定要画出立体的准确图形, 但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域, 并知道立体的底和顶的方程, 这就需要复习和掌握第八章中学过的空间解析几何的有关知识.

11. 画出积分区域, 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 D 是:

- (1) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0)$;
- (2) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$;
- (3) $\{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, 其中 $0 < a < b$;
- (4) $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$.

解 (1) 如图 10-19, 在极坐标系中, $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

(2) 如图 10-20, 在极坐标系中,

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

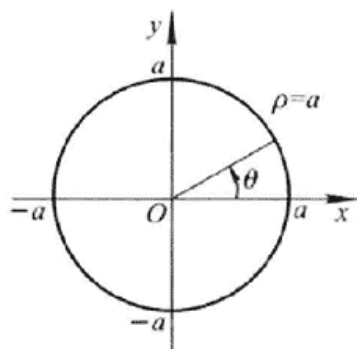


图 10-19

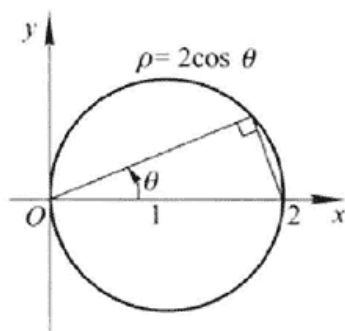


图 10-20

(3) 如图 10-21, 在极坐标系中, $D = \{(\rho, \theta) \mid a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

(4) D 如图 10-22 所示. 在极坐标系中, 直线 $x + y = 1$ 的方程为 $\rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$, 故 $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

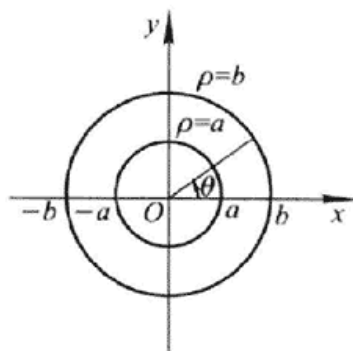


图 10-21

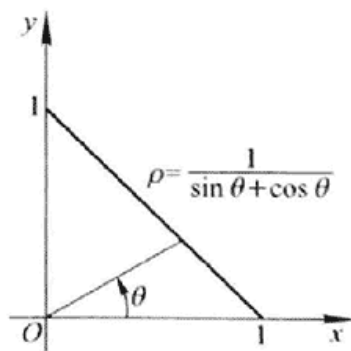


图 10-22

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

- | | |
|---|--|
| (1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy;$ | (2) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$ |
| (3) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$ | (4) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$ |

解 (1) 如图 10-23, 用直线 $y=x$ 将积分区域 D 分成 D_1, D_2 两部分:

$$D_1 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

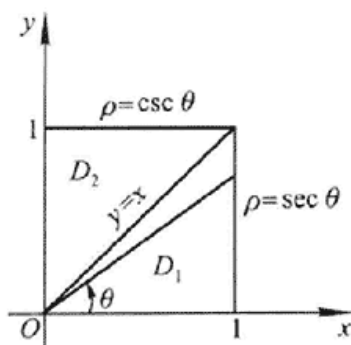


图 10-23

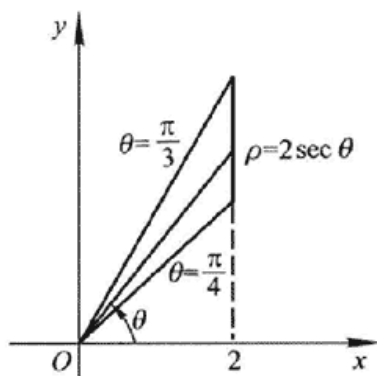


图 10-24

(2) D 如图 10-24 所示. 在极坐标系中, 直线 $x=2$, 射线 $y=x$ 和 $y=\sqrt{3}x (x \geq 0)$

的方程分别是 $\rho=2\sec \theta, \theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 因此

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\sec \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

又 $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(\rho)$, 于是

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2\sec \theta} f(\rho) \rho d\rho.$$

(3) D 如图 10-25 所示. 在极坐标系中, 直线 $y=1-x$ 的方程为 $\rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$, 圆 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的方程为 $\rho=1$, 因此

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(4) D 如图 10-26 所示. 在极坐标系中, 直线 $x=1$ 的方程是 $\rho = \sec \theta$; 抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$, 即 $\rho = \tan \theta \sec \theta$; 从原点到两者的交点的射线是 $\theta = \frac{\pi}{4}$. 故

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid \tan \theta \sec \theta \leq \rho \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\tan \theta \sec \theta}^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

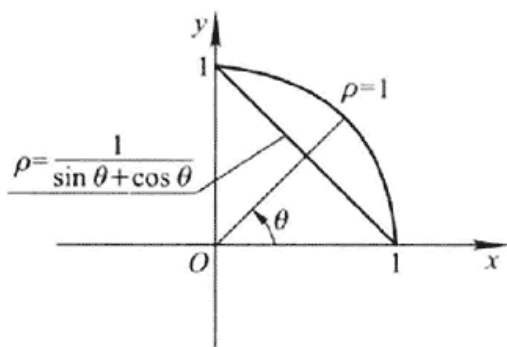


图 10-25

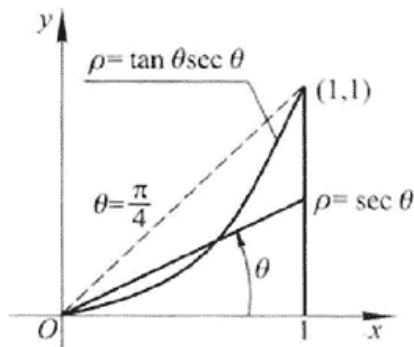


图 10-26

13. 把下列积分化为极坐标形式,并计算积分值:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy;$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx.$$

解 (1) 积分区域 D 如图 10-27 所示. 在极坐标系中,

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 4a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

注 在多元函数积分学的计算题中,常会遇到定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$. 因此记住如下的结果是有益的:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta \right) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的正奇数.} \end{cases}$$

(2) 如图 10-28, 在极坐标系中,

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

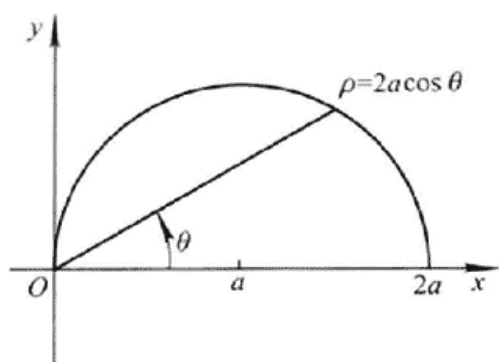


图 10-27

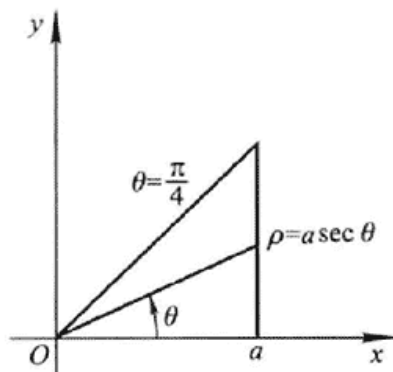


图 10-28

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec \theta} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{a^3}{6} [\sec \theta \tan \theta + \ln(\sec \theta + \tan \theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{a^3}{6} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].
 \end{aligned}$$

(3) 积分区域 D 如图 10-29 所示. 在极坐标系中, 抛物线 $y = x^2$ 的方程是 $\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$, 即 $\rho = \tan \theta \sec \theta$; 射线 $y = x (x \geq 0)$ 的方程是 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 故

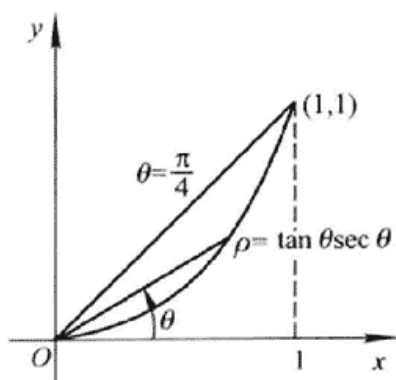


图 10-29

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan \theta \sec \theta d\theta = [\sec \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.
 \end{aligned}$$

(4) 积分区域

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}, 0 \leq y \leq a\} \\ &= \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}, \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{8} a^4.$$

 14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 0$, $y = x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) 在极坐标系中, 积分区域 $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 于是

$$\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma = \iint_D e^{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \cdot \rho d\rho = 2\pi \cdot \left[\frac{e^{\rho^2}}{2} \right]_0^2 = \pi(e^4 - 1).$$

(2) 在极坐标系中, 积分区域 $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma &= \iint_D \ln(1 + \rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1 + \rho^2) \cdot \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1 + \rho^2) d(1 + \rho^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(1 + \rho^2) \ln(1 + \rho^2) \right]_0^1 - \int_0^1 2\rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{4} (2\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

(3) 在极坐标系中, 积分区域 $D = \{(\rho, \theta) \mid 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, $\arctan \frac{y}{x} = \theta$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma &= \iint_D \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} (2^2 - 1) \\ &= \frac{3}{64} \pi^2. \end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$, 其中 D 是由直线 $x=2, y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D (x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a (a>0)$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y) | a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$.

解 (1) D 如图 10-30 所示. 根据 D 的形状, 选用直角坐标较宜.

$D = \left\{ (x,y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2 \right\}$, 故

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 (-x + x^3) dx = \frac{9}{4}.$$

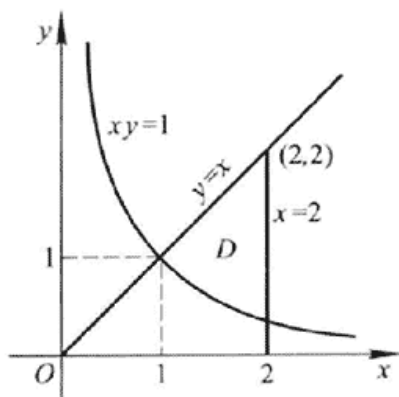


图 10-30

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点, 选用极坐标为宜.

$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho - \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} d(1-\rho^4) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \arcsin \rho^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\rho^4} \Big|_0^1 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{8}(\pi - 2).$$

(3) D 如图 10-31 所示. 选用直角坐标为宜. 又根据 D 的边界曲线的情况, 宜采用先对 x 、后对 y 的积分次序. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} \left(2ay^2 - a^2y + \frac{a^3}{3} \right) dy = 14a^4.\end{aligned}$$

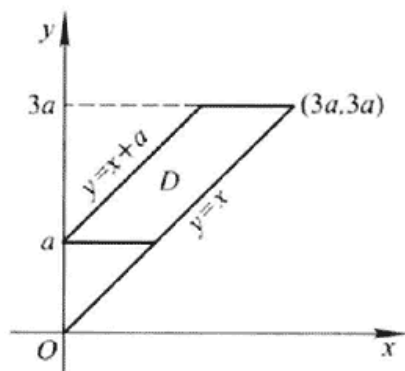


图 10-31

(4) 本题显然适于用极坐标计算. $D = \{(\rho, \theta) \mid a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma &= \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^2 d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3).\end{aligned}$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho = 2\theta$ 上一段弧 $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 与直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$. 求这薄片的质量.

解 薄片的质量为它的面密度在薄片所占区域 D 上的二重积分(图 10-32), 即

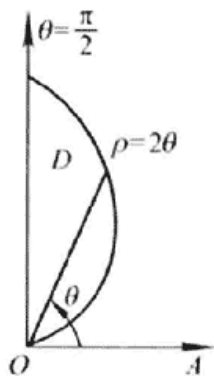


图 10-32

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma \\
 &= \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} \rho^3 d\rho \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}.
 \end{aligned}$$

例 17. 求由平面 $y=0, y=kx (k>0), z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 如图 10-33, 记 $\alpha = \arctan k$,

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^\alpha d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} d(R^2 - \rho^2) \\
 &= \frac{\alpha R^3}{3} = \frac{R^3}{3} \arctan k.
 \end{aligned}$$

例 18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z = x^2 + y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 如图 10-34, 设

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}, 0 \leq x \leq a\} \\
 &= \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},
 \end{aligned}$$

由于曲顶柱体关于 zOx 面对称, 故

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy \\
 &= 2 \iint_{D_1} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \rho^3 d\rho \\
 &= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{a^4}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{32} \pi a^4.
 \end{aligned}$$

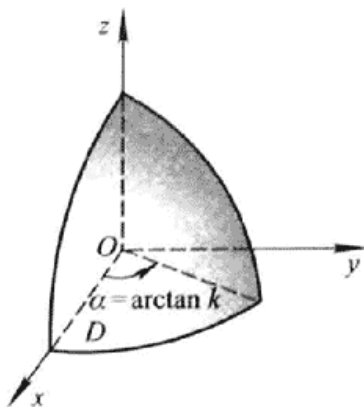


图 10-33

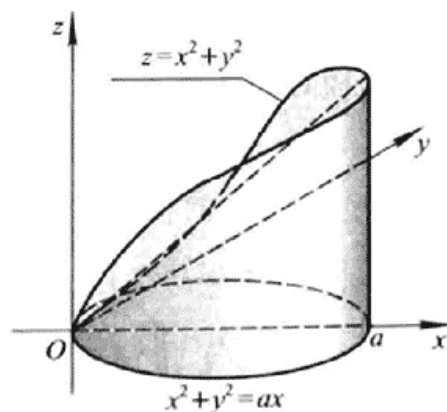


图 10-34

注 在计算立体体积时,要注意充分利用图形的对称性,这样既能简化运算,也能减少错误.

例 * 19. 作适当的变换,计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$, 其中 D 是平行四边形闭区域,它的四个顶点是 $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi)$ 和 $(0, \pi)$;

(2) $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, 其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$, 直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D e^{\frac{1}{x+y}} dx dy$, 其中 D 是由 x 轴、 y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$, 其中 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

解 (1) 令 $u=x-y, v=x+y$, 则 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$. 在这变换下, D 的边界 $x-y=-\pi, x+y=\pi, x-y=\pi, x+y=3\pi$ 依次与 $u=-\pi, v=\pi, u=\pi, v=3\pi$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是

$$D' = \{(u, v) \mid -\pi \leq u \leq \pi, \pi \leq v \leq 3\pi\} \text{ (图 10-35)}.$$

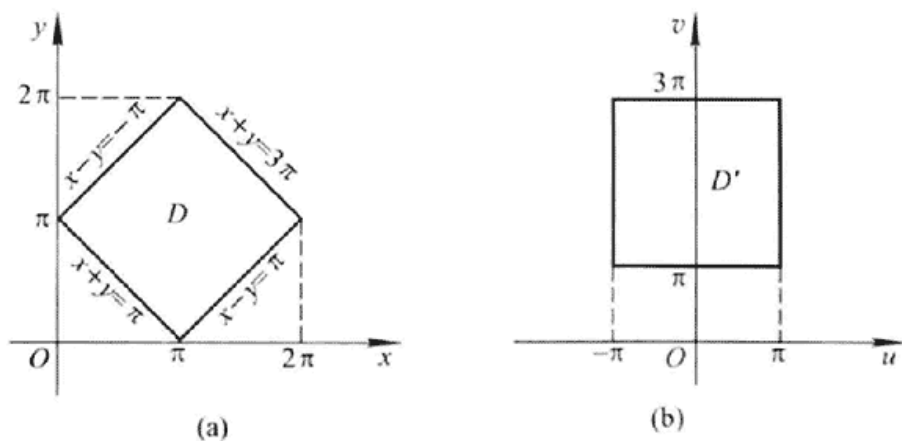


图 10-35

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

因此

$$\begin{aligned} & \iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy \\ &= \iint_{D'} u^2 \sin^2 v \cdot \frac{1}{2} du dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 du \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 v dv \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \left[\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right]_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}.
 \end{aligned}$$

(2) 令 $u = xy, v = \frac{y}{x}$, 则 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$. 在这变换下, D 的边界 $xy = 1, y = x, xy = 2, y = 4x$ 依次与 $u = 1, v = 1, u = 2, v = 4$ 对应, 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是 $D' = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$ (图 10-36). 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{2v}.$$

因此

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du \int_1^4 \frac{1}{v} dv \\
 &= \frac{7}{3} \ln 2.
 \end{aligned}$$

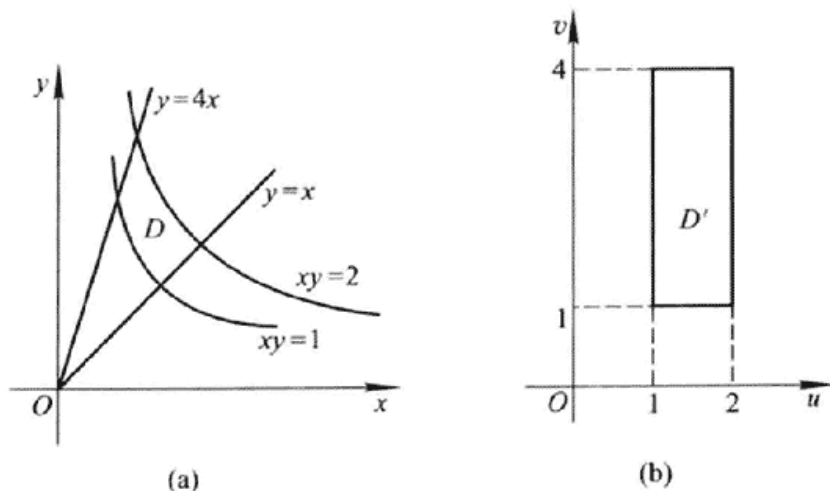


图 10-36

(3) 令 $u = x + y, v = y$, 即 $x = u - v, y = v$, 则在这变换下, D 的边界 $y = 0, x = 0, x + y = 1$ 依次与 $v = 0, u = v, u = 1$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界, 于是

$$D' = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq u, 0 \leq u \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

因此

$$\begin{aligned}
 \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy &= \iint_{D'} e^{\frac{v}{u}} du dv = \int_0^1 du \int_0^u e^{\frac{v}{u}} dv = \int_0^1 u(e - 1) du \\
 &= \frac{1}{2}(e - 1).
 \end{aligned}$$

(4) 作广义极坐标变换 $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta, \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} (a > 0, b > 0, \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$. 在此变换

下, 与 D 对应的闭区域为 $D' = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

$$\text{故} \quad \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \iint_{D'} \rho^2 \cdot ab\rho d\rho d\theta = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} ab\pi.$$

 * 20. 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积:

(1) D 是由曲线 $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$ 所围成的第一象限部分的闭区域;

(2) D 是由曲线 $y = x^3, y = 4x^3, x = y^3, x = 4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域.

解 (1) 令 $u = xy, v = xy^3 (x \geq 0, y \geq 0)$, 则 $x = \sqrt{\frac{u^3}{v}}, y = \sqrt{\frac{v}{u}}$. 在这变换下, 与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D' = \{(u, v) \mid 4 \leq u \leq 8, 5 \leq v \leq 15\}$.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

于是所求面积为

$$A = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_4^8 du \int_5^{15} \frac{1}{v} dv = 2 \ln 3.$$

(2) 令 $u = \frac{y}{x^3}, v = \frac{x}{y^3} (x > 0, y > 0)$, 则 $x = u^{-\frac{3}{8}} v^{-\frac{1}{8}}, y = u^{-\frac{1}{8}} v^{-\frac{3}{8}}$. 在这变换下, 与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D' = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 4\}$. 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}} \\ -\frac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\frac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{8} u^{-\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}} du dv = \frac{1}{8} \int_1^4 u^{-\frac{3}{2}} du \int_1^4 v^{-\frac{3}{2}} dv \\ &= \frac{1}{8} ([-2u^{-\frac{1}{2}}]_1^4)^2 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

 * 21. 设闭区域 D 是由直线 $x + y = 1, x = 0, y = 0$ 所围成, 求证

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \frac{1}{2} \sin 1.$$

证 令 $u = x - y, v = x + y$, 则 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{2}$, 在此变换下, D 的边界 $x + y = 1, x = 0, y = 0$ 依次与 $v = 1, u + v = 0$ 和 $v - u = 0$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界 (图 10-37). 于是

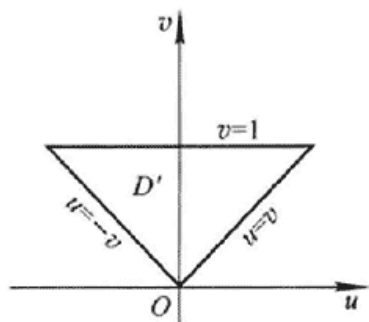


图 10-37

$$D' = \{(u, v) \mid -v \leq u \leq v, 0 \leq v \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

因此有

$$\begin{aligned} \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy &= \iint_{D'} \cos \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v \cos \frac{u}{v} du = \frac{1}{2} \int_0^1 v \left[\sin \frac{u}{v} \right]_{-v}^v dv \\ &= \int_0^1 v \sin 1 dv = \frac{1}{2} \sin 1. \end{aligned}$$

证毕.

例 22. 选取适当的变换, 证明下列等式:

$$(1) \iint_D f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du, \text{ 其中闭区域 } D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\};$$

$$(2) \iint_D f(ax+by+c) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \text{ 且 } a^2 + b^2 \neq 0.$$

证 (1) 闭区域 D 的边界为 $x+y = -1, x+y = 1, x-y = -1, x-y = 1$, 故令 $u = x+y, v = x-y$, 即 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. 在此变换下, D 变为 uOv 平面上的闭区域

$$D' = \{(u, v) \mid -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x+y) dx dy &= \iint_{D'} f(u) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du \int_{-1}^1 dv = \int_{-1}^1 f(u) du. \end{aligned}$$

证毕.

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2} = ax+by, \quad \text{即} \quad u = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

再考虑到 D 的边界曲线为 $x^2+y^2=1$, 故令 $v = \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 这样就有 $u^2+v^2=1$, 即 D

的边界曲线 $x^2+y^2=1$ 变为 uOv 平面上的圆 $u^2+v^2=1$. 于是与 D 对应的闭区域为 $D' = \{(u, v) \mid u^2+v^2 \leq 1\}$.

又由 u, v 的表达式可解得

$$x = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

因此雅可比式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix} = -1,$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(ax+by+c) dx dy &= \iint_{D'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) \left| -1 \right| du dv \\ &= \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du. \end{aligned}$$

证毕.

习题 10-3

三重积分

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是:

(1) 由双曲抛物面 $xy = z$ 及平面 $x + y - 1 = 0, z = 0$ 所围成的闭区域;

(2) 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 所围成的闭区域;

(3) 由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 2 - x^2$ 所围成的闭区域;

(4) 由曲面 $cz = xy (c > 0)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ 所围成的在第一卦限内的闭

区域.

解 (1) Ω 的顶 $z = xy$ 和底面 $z = 0$ 的交线为 x 轴和 y 轴, 故 Ω 在 xOy 面上的投影区域由 x 轴、 y 轴和直线 $x + y - 1 = 0$ 所围成. 于是 Ω 可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq xy, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$$

(2) 由 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 1$ 得 $x^2 + y^2 = 1$, 所以 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2 + y^2 \leq 1$ (图 10-38). Ω 可用不等式表示为

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

(3) 由 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases}$, 消去 z , 得 $x^2 + y^2 = 1$. 故 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2 + y^2 \leq 1$ (图 10-39). 于是 Ω 可用不等式表示为

$$x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2 - x^2, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

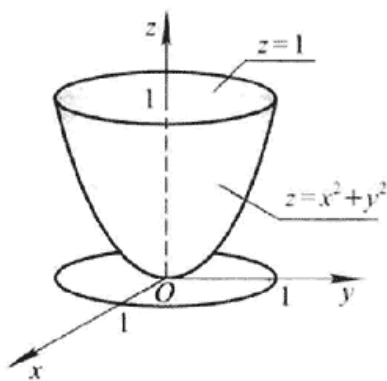


图 10-38

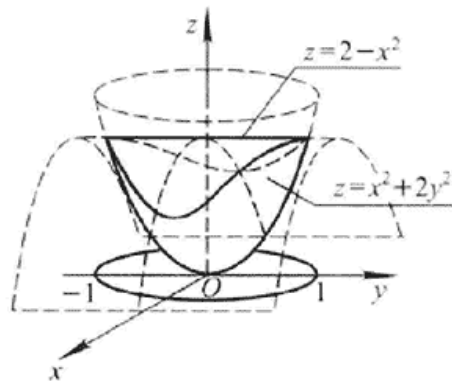


图 10-39

(4) 显然 Ω 在 xOy 面上的投影区域由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 和 x 轴、 y 轴所围成, Ω 的顶为 $cz = xy$, 底为 $z = 0$ (图 10-40). 故 Ω 可用不等式表示为

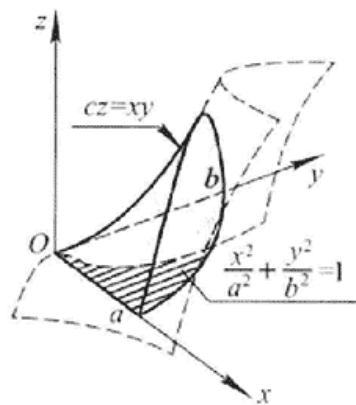


图 10-40

$$0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, \quad 0 \leq y \leq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

因此

$$I = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_0^{\frac{xy}{c}} f(x, y, z) dz.$$

注 本题中的 4 个小题, 除第 2 小题外, Ω 的图形都不易画出. 但是, 为确定三次积分的积分限, 并非必须画出 Ω 的准确图形. 重要的是要会求出 Ω 在坐标面上的投影区域, 以及会定出 Ω 的顶和底面, 而做到这点, 只需掌握常见曲面的方程和图形特点, 并具备一定的空间想象能力即可. 本章题解中配了较多插图, 请读者注意观察, 这对培养空间想象能力是有好处的.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x + y + z$, 计算该物体的质量.

$$\text{解} \quad M = \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx \\
 &= \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

 3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 的被积函数 $f(x, y, z)$ 是三个函数 $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ 的乘积, 即 $f(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$, 积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

证

$$\begin{aligned}
 &\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z) dx dy dz \\
 &= \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z) dz \right) dy \right] dx \\
 &= \int_a^b \left[\int_c^d \left(f_1(x)f_2(y) \cdot \int_l^m f_3(z) dz \right) dy \right] dx \\
 &= \int_a^b \left[\left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \cdot \left(\int_c^d f_1(x)f_2(y) dy \right) \right] dx \\
 &= \left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \cdot \int_a^b \left[f_1(x) \cdot \int_c^d f_2(y) dy \right] dx \\
 &= \int_l^m f_3(z) dz \cdot \int_c^d f_2(y) dy \cdot \int_a^b f_1(x) dx = \text{右端}.
 \end{aligned}$$

 4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = xy$, 平面 $y = x$, $x = 1$ 和 $z = 0$ 所围成的闭区域.

解 如图 10-41, Ω 可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq xy, \quad 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

因此

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 x dx \int_0^x x^4 y^6 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.
 \end{aligned}$$

 5. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$ (图 10-42), 于是

$$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[-\frac{y}{8} - \frac{1}{2(1+x+y)} \right]_0^{1-x} dx \\
 &= - \int_0^1 \left[\frac{1-x}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+x)} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).
 \end{aligned}$$

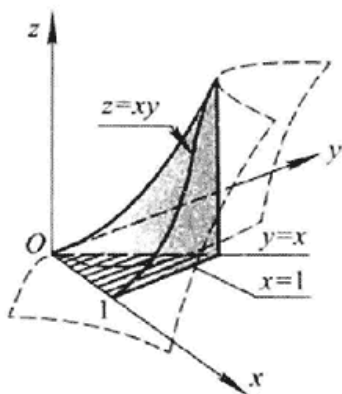


图 10-41

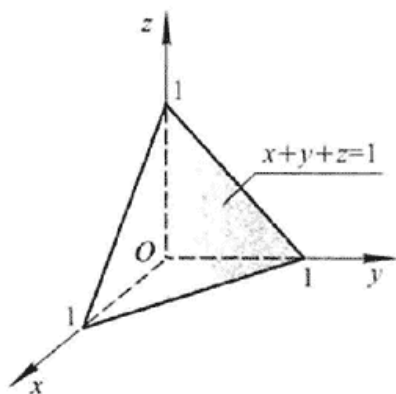


图 10-42

■ 6. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解法一 利用直角坐标计算. 由于

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\},$$

故

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\
 &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{1-x^2-y^2}{2} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} (1-x^2) - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^1 x (1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

* 解法二 利用球面坐标计算, 由于

$$\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

故

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \iiint_{\Omega} (r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta) \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^5 dr \\
 &= \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\sin^4 \varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

注 比较本题的两种解法,显然用球面坐标计算要简便得多,这是由本题的积分区域 Ω 的形状所决定的.一般说来,凡是 Ω 由球面、圆锥面等曲面围成时,用球面坐标计算三重积分较为方便.

例 7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0, z=y, y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解法一 容易看出, Ω 的顶为平面 $z=y$, 底为平面 $z=0$, Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 由 $y=1$ 和 $y=x^2$ 所围成. 故 Ω 可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1.$$

因此

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} xz dx dy dz &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z dz \\
 &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 \frac{y^2}{2} dy = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) dx = 0.
 \end{aligned}$$

解法二 由于积分区域 Ω 关于 yOz 面对称(即若点 $(x, y, z) \in \Omega$, 则 $(-x, y, z)$ 也属于 Ω), 且被积函数 xz 关于 x 是奇函数(即 $(-x)z = -(xz)$), 因此

$$\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = 0.$$

例 8. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h$ ($R > 0, h > 0$) 所围成的闭区域.

解法一 由 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = h$ 消去 z , 得

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

故 Ω 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (图 10-43),

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, (x, y) \in D_{xy} \right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \right] dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[h^2 \iint_{D_{xy}} dx dy - \frac{h^2}{R^2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \right] \\
 &= \frac{h^2}{2} \cdot \pi R^2 - \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2.
 \end{aligned}$$

解法二 用过点 $(0,0,z)$ 、平行于 xOy 面的平面截 Ω 得平面圆域 D_z , 其半径为 $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{Rz}{h}$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$ (图 10-43).

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, 0 \leq z \leq h\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy \\
 &= \int_0^h z \cdot \frac{\pi R^2}{h^2} z^2 dz = \frac{\pi R^2}{4h^2} \cdot h^4 = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2.
 \end{aligned}$$

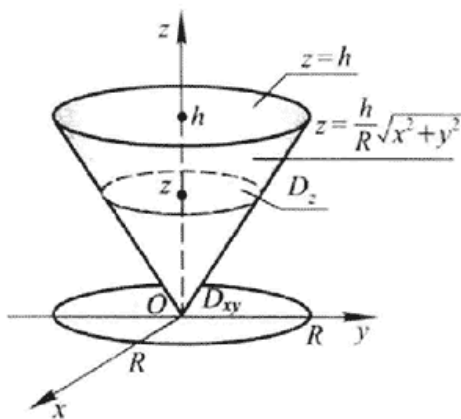


图 10-43

注 解法二通俗地称为“先重后单”法,即先在 D_z 上作关于 x, y 的二重积分,然后再对 z 作定积分.如果在 D_z 上关于 x 和 y 的二重积分易于计算,特别地,如果被积函数与 x, y 无关,且 D_z 的面积容易表达为 z 的函数,则采用这种方法比较简便.

* 解法三 用球面坐标进行计算.在球面坐标系中,圆锥面 $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 的方程为 $\varphi = \alpha \left(= \arctan \frac{R}{h} \right)$, 平面 $z = h$ 的方程为 $r = h \sec \varphi$, 因此 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq r \leq h \sec \varphi.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{h \sec \varphi} r^3 dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\alpha} \frac{h^4 \sin \varphi}{4 \cos^3 \varphi} d\varphi = -\frac{\pi h^4}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d(\cos \varphi)}{\cos^3 \varphi} \\
 &= \frac{\pi h^4}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \left(\text{代入 } \alpha = \arctan \frac{R}{h} \right) \\
 &= \frac{\pi h^4}{4} \left(\frac{R^2 + h^2}{h^2} - 1 \right) = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2.
 \end{aligned}$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

- (1) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域;
 (2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

解 (1) 由 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 消去 z , 得

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 - (x^2 + y^2), \text{ 即 } x^2 + y^2 = 1.$$

从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (图 10-44). 利用柱面坐标, Ω 可表示为

$$\rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

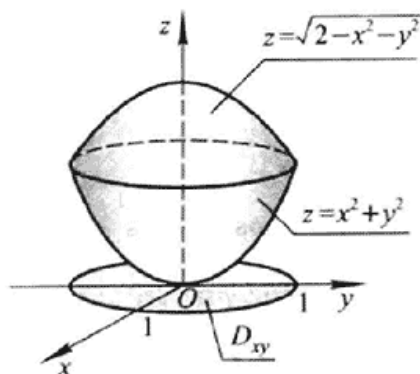


图 10-44

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 = \frac{7}{12}\pi.$$

(2) 由 $x^2 + y^2 = 2z$ 及 $z = 2$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 4$, 从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. 利用柱面坐标, Ω 可表示为

$$\frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12} \right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

 * 10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2$ 所确定.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv &= \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr \\ &= 2\pi [-\cos \varphi]_0^{\pi} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5}\pi. \end{aligned}$$

(2) 在球面坐标系中, 不等式 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$, 即 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, 变为 $r^2 \leq 2a \cos \varphi$, 即 $r \leq 2a \cos \varphi$; $x^2 + y^2 \leq z^2$ 变为 $r^2 \sin^2 \varphi \leq r^2 \cos^2 \varphi$, 即 $\tan \varphi \leq 1$, 亦即 $\varphi \leq \frac{\pi}{4}$. 因此 Ω 可表示为

$$0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (图 10-45)}.$$

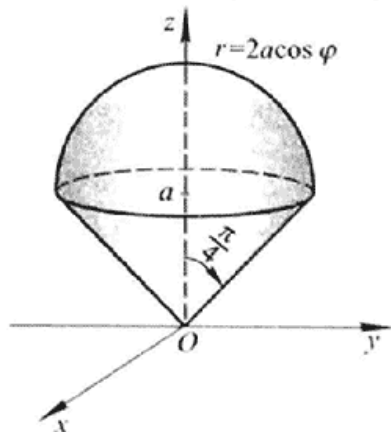


图 10-45

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 dr \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi \cdot \frac{1}{4} (2a \cos \varphi)^4 d\varphi \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4a^4 \cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi \\
 &= 8\pi a^4 \left[-\frac{\cos^6 \varphi}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{6} \pi a^4.
 \end{aligned}$$

 11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$ 所围成

的在第一卦限内的闭区域;

* (2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2 = 25(x^2 + y^2)$ 及平面 $z = 5$ 所围成的

闭区域;

* (4) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A, z \geq 0$ 所

确定.

解 (1) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$0 \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} xy dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \rho d\rho d\theta dz \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz \\
 &= \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \left[z \right]_0^1 = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

* (2) 在球面坐标系中, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 的方程为 $r^2 = r \cos \varphi$, 即 $r = \cos \varphi$. Ω 可表示为

$$0 \leq r \leq \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (图 10-46)}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv &= \iiint_{\Omega} r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \frac{\cos^4 \varphi}{4} d\varphi \\
 &= -\frac{\pi}{2} \left[\frac{\cos^5 \varphi}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.
 \end{aligned}$$

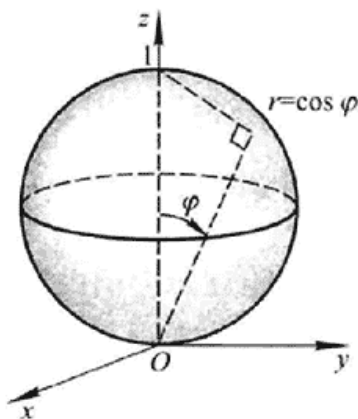


图 10-46

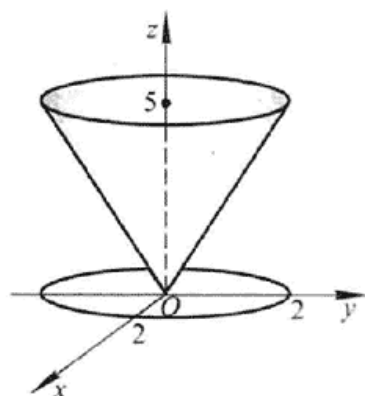


图 10-47

(3) 利用柱面坐标计算, Ω 可表示为

$$\frac{5}{2}\rho \leq z \leq 5, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (图 10-47)},$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \left(5 - \frac{5}{2}\rho \right) d\rho \\
 &= 2\pi \left[\frac{5}{4}\rho^4 - \frac{1}{2}\rho^5 \right]_0^2 = 8\pi.
 \end{aligned}$$

* (4) 在球面坐标系中, Ω 可表示为

$$a \leq r \leq A, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr \\
 &= 2\pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{A^5 - a^5}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}(A^5 - a^5).
 \end{aligned}$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

- (1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
 * (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0)$ 及 $x^2 + y^2 = z^2$ (含有 z 轴的部分);
 (3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$;
 (4) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 4z$.

解 (1) 利用直角坐标计算. 由 $z = 6 - x^2 - y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 消去 z , 解得 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, 即 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leq 4$. 于是

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{6 - (x^2 + y^2)} dz \\
 &= \iint_{D_{xy}} [6 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy \quad (\text{用极坐标}) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6 - \rho^2 - \rho) \rho d\rho \\
 &= 2\pi \left[3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

注 本题也可用“先重后单”的积分次序求解:

对固定的 z , 当 $0 \leq z \leq 2$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$; 当 $2 \leq z \leq 6$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6 - z\}$ (图 10-48). 于是

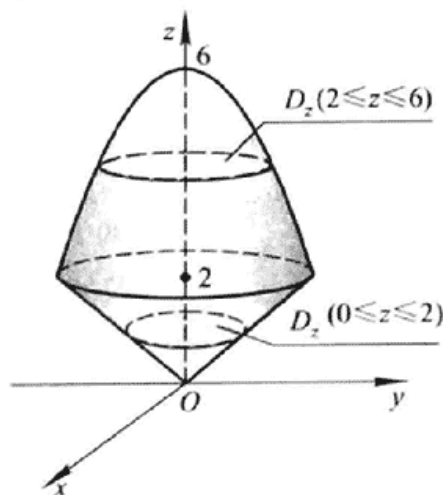


图 10-48

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 = \int_0^2 dz \iint_{D_1} dx dy + \int_2^6 dz \iint_{D_2} dx dy \\
 &= \int_0^2 \pi z^2 dz + \int_2^6 \pi(6-z) dz \\
 &= \frac{8}{3}\pi + 8\pi = \frac{32}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

* (2) 利用球面坐标计算. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 及圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的球面坐标方程分别为 $r = 2a \cos \varphi$ 和 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 故

$$\Omega = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \text{ (图 10-45).}$$

于是

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8a^3}{3} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{16\pi a^3}{3} \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi a^3.
 \end{aligned}$$

注 本题若用“先重后单”的方法计算也很简便.

由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 和 $x^2 + y^2 = z^2$ 解得 $z = a$. 对固定的 z , 当 $0 \leq z \leq a$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$; 当 $a \leq z \leq 2a$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2az - z^2\}$. 于是

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 = \int_0^a dz \iint_{D_1} dx dy + \int_a^{2a} dz \iint_{D_2} dx dy \\
 &= \int_0^a \pi z^2 dz + \int_a^{2a} \pi(2az - z^2) dz \\
 &= \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^3 = \pi a^3.
 \end{aligned}$$

(3) 利用柱面坐标计算. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 的柱面坐标方程分别为 $z = \rho$ 和 $z = \rho^2$. 消去 z , 得 $\rho = 1$, 故它们所围的立体在 xOy 面上的投影区域为 $\rho \leq 1$ (图 10-49). 因此

$$\Omega = \{(\rho, \theta, z) \mid \rho^2 \leq z \leq \rho, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

于是

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho(\rho - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

(本题也可用“先重后单”的方法方便地求得结果,读者可自己练习.)

(4) 在直角坐标系中用“先重后单”的方法计算. 由 $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = 4z$ 可解得 $z = 1$.

对固定的 z , 当 $0 \leq z \leq 1$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4z\}$; 当 $1 \leq z \leq \sqrt{5}$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5 - z^2\}$ (图 10-50). 于是

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \int_0^1 dz \iint_{D_z} dx dy + \int_1^{\sqrt{5}} dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \int_0^1 \pi \cdot 4z dz + \int_1^{\sqrt{5}} \pi(5 - z^2) dz \\ &= 2\pi + \pi \left[5z - \frac{z^3}{3} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 4). \end{aligned}$$

(本题用柱面坐标计算也很方便,请读者自己练习.)

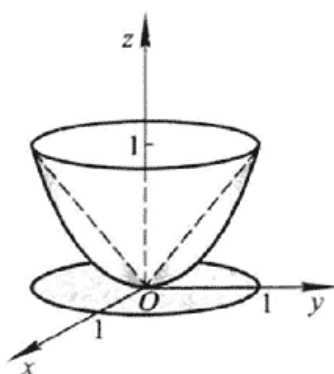


图 10-49

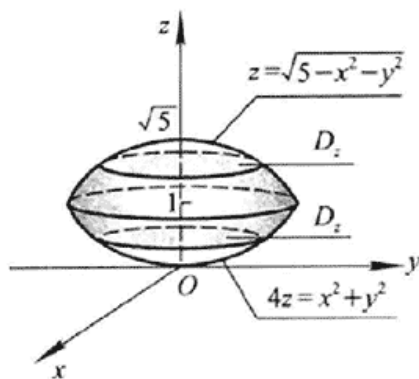


图 10-50

*** 13.** 求球体 $r \leq a$ 位于锥面 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

解 用球面坐标计算. 记 Ω 为立体所占的空间区域, 有

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

14. 求上、下分别为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积.

解 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和 $z = x^2 + y^2$ 消去 z , 解得 $x^2 + y^2 = 1$. 从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leq 1$. 于是

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

因此

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{D_{xy}} [\sqrt{2-x^2-y^2} - (x^2+y^2)] dx dy \quad (\text{用极坐标}) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2) \rho d\rho \\
 &= \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.
 \end{aligned}$$

注 本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^{\sqrt{2}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2-z^2} dx dy + \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \\
 &= \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2-z^2) dz + \pi \int_0^1 z dz \\
 &= \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.
 \end{aligned}$$

例 15. 球心在原点、半径为 R 的球体,在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比,求这球体的质量.

解 用球面坐标计算. Ω 为 $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, 即 $r \leq R$. 按题设, 密度函数 $\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2} = kr (k > 0)$. 于是

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} kr \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr \\
 &= k \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = k\pi R^4.
 \end{aligned}$$

习题 10-4

重积分的应用

例 1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解 如图 10-51, 上半球面的方程为 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \\
 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.
 \end{aligned}$$

由曲面的对称性得所求面积为

$$A = 4 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \stackrel{\text{(极坐标)}}{=} 4a \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta \\
 &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho \\
 &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2a^2 (\pi - 2).
 \end{aligned}$$

2. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积.

解 由 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases}$, 解得 $x^2 + y^2 = 2x$, 故曲面在 xOy 面上的投影区域 $D =$

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$ (图 10-52).

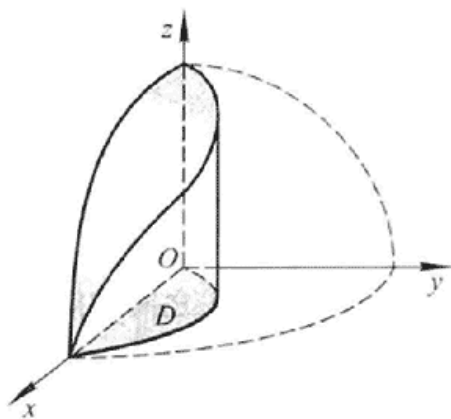


图 10-51

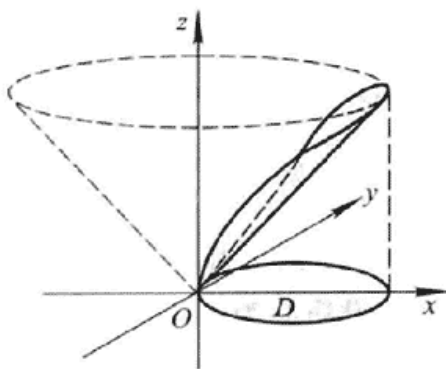


图 10-52

被割曲面的方程为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2},$$

于是所求曲面的面积为

$$A = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \cdot (D \text{ 的面积}) = \sqrt{2}\pi.$$

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的表面积.

解 如图 10-53, 设第一卦限内的立体表面位于圆柱面 $x^2 + z^2 = R^2$ 上的那一部分的面积为 A , 则由对称性知全部表面的面积为 $16A$.

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} + 0} dx dy \\
 &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy = R \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy
 \end{aligned}$$

$$= R \int_0^R dx = R^2,$$

故全部表面积为 $16R^2$.

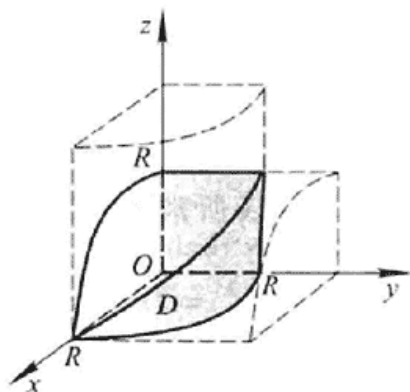


图 10-53

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下, 求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y = \sqrt{2px}$, $x = x_0$, $y = 0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0 \right\}$;

(3) D 是介于两个圆 $\rho = a \cos \theta$, $\rho = b \cos \theta$ ($0 < a < b$) 之间的闭区域.

解 (1) 设质心为 $(\bar{x}, \bar{y})$.

$$A = \iint_D dx dy = \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2px_0^3},$$

$$\iint_D x dx dy = \int_0^{x_0} x dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px}^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} \sqrt{2px_0^5},$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \int_0^{x_0} px dx = \frac{px_0^2}{2},$$

于是

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{3}{5} x_0, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{3}{8} \sqrt{2px_0} = \frac{3}{8} y_0,$$

故所求质心为 $\left(\frac{3}{5} x_0, \frac{3}{8} y_0 \right)$.

(2) 因 D 关于 y 轴对称, 故质心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 必位于 y 轴上, 于是 $\bar{x} = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} y dy \\ &= \frac{1}{A} \int_{-a}^a \frac{b^2}{2a^2} (a^2 - x^2) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi ab} \cdot \frac{2}{3}ab^2 = \frac{4b}{3\pi}.$$

因此所求质心为 $(0, \frac{4b}{3\pi})$.

(3) 因 D 关于 x 轴对称, 故质心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 位于 x 轴上, 于是 $\bar{y} = 0$ (图 10-54).

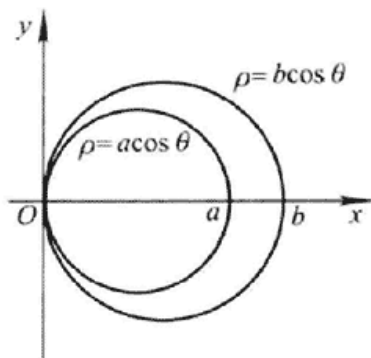


图 10-54

$$A = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2),$$

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \iint_D \rho \cos \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}(b^3 - a^3), \end{aligned}$$

故
$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a + b)}.$$

所求质心为 $(\frac{a^2 + ab + b^2}{2(a + b)}, 0)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y) = x^2 y$, 求该薄片的质心.

解

$$\begin{aligned} M &= \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^x y dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(x^4 - x^6) dx = \frac{1}{35}, \\ M_x &= \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \iint_D x^2 y^2 dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^x y^2 dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{3} (x^5 - x^8) dx = \frac{1}{54}, \\
 M_y &= \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \iint_D x^3 y dx dy \\
 &= \int_0^1 x^3 dx \int_{x^2}^x y dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} (x^5 - x^7) dx = \frac{1}{48}, \\
 \text{于是} \quad \bar{x} &= \frac{M_y}{M} = \frac{35}{48}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{35}{54}.
 \end{aligned}$$

所求质心为 $(\frac{35}{48}, \frac{35}{54})$.

例 6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a , 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.

解 如图 10-55, 按题设, 面密度 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$. 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y}$.

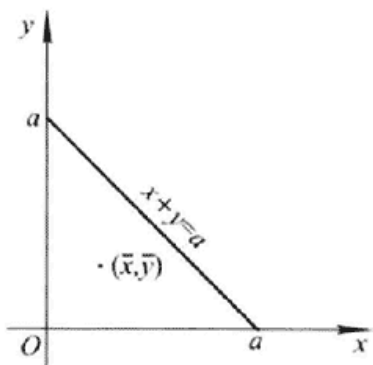


图 10-55

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\
 &= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3} \right] dx = \frac{1}{6} a^4, \\
 M_y &= \iint_D x(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a x dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\
 &= \int_0^a \left[x^3(a-x) + \frac{x(a-x)^3}{3} \right] dx \\
 &= \int_0^a \left(-\frac{4}{3}x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + \frac{a^3}{3}x \right) dx = \frac{1}{15} a^5, \\
 \text{因此} \quad \bar{x} &= \frac{M_y}{M} = \frac{2}{5} a, \quad \bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5} a.
 \end{aligned}$$

所求质心为 $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度 $\rho = 1$):

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$;

* (2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (A > a > 0), z = 0$;

(3) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$.

解 (1) 曲面所围立体为圆锥体, 其顶点在原点, 并关于 z 轴对称, 又由于它是均匀的, 因此它的质心位于 z 轴上, 即有 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 立体的体积为 $V = \frac{1}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z dz \\ &= \frac{1}{V} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \rho d\rho \\ &= \frac{3}{\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4},\end{aligned}$$

故所求质心为 $\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$.

* (2) 立体由两个同心的上半球面和 xOy 面所围成, 关于 z 轴对称, 又由于它是均匀的, 故其质心位于 z 轴上, 即有 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 立体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi (A^3 - a^3).$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_a^A r^3 dr \\ &= \frac{3}{2\pi(A^3 - a^3)} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{A^4 - a^4}{4} \\ &= \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)},\end{aligned}$$

故立体质心为 $\left(0, 0, \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)}\right)$.

(3) 如图 10-56, $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$.

$$\begin{aligned}V &= \iiint_{\Omega} dv = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy\end{aligned}$$

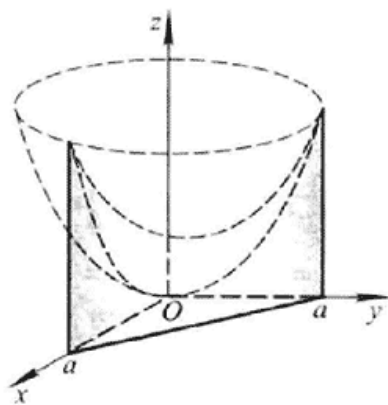


图 10-56

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx \\
 &= \int_0^a \left[ax^2 - x^3 + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx = \frac{1}{6}a^4, \\
 \bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz \\
 &= \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{1}{2} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy \\
 &= \frac{1}{2V} \int_0^a \left[x^4(a-x) + \frac{2}{3}x^2(a-x)^3 + \frac{1}{5}(a-x)^5 \right] dx \\
 &= \frac{3}{a^4} \cdot \frac{7a^6}{90} = \frac{7}{30}a^2, \\
 \bar{x} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dv = \frac{1}{V} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\
 &= \frac{1}{V} \int_0^a x \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx \\
 &= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{a^5}{15} = \frac{2}{5}a,
 \end{aligned}$$

由于立体匀质且关于平面 $y = x$ 对称,故

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a.$$

所求质心为 $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2 \right)$.

例 8. 设球体占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$, 它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方, 试求这球体的质心.

解 在球面坐标系中, Ω 可表示为

$$0 \leq r \leq 2R \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

球体内任意一点 (x, y, z) 处的密度大小为

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

由于球体的几何形状及质量分布均关于 z 轴对称, 故可知其质心位于 z 轴上, 因此 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D \rho \, dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \, dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} R^5 \cos^5\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{32}{15} \pi R^5, \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_D \rho z \, dv = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, dr \\ &= \frac{2\pi}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{6} R^6 \cos^7\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{5}{4} R, \end{aligned}$$

故球体的质心为 $(0, 0, \frac{5}{4}R)$.

注 从以上两题的题解可看出, 在计算立体的质心时, 要注意利用对称性来减少运算量. 对匀质立体来说, 只要考虑立体几何形状的对称性(如第7题); 但对非匀质立体来说, 除了立体的几何形状的对称性外, 还需注意立体的质量分布是否也具有相应的对称性(如第8题).

9. 设均匀薄片(面密度为常数1)所占闭区域 D 如下, 求指定的转动惯量:

(1) $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, 求 I_y ;

(2) D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x = 2$ 所围成, 求 I_x 和 I_y ;

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, 求 I_x 和 I_y .

$$\begin{aligned} \text{解 (1) } I_y &= \iint_D x^2 \, dx \, dy = \int_{-a}^a x^2 \, dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} \, dx \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} \, dx. \end{aligned}$$

令 $x = a \sin t$, 换元, 则

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t \cos t \cdot a \cos t \, dt \\ &= 4a^3 b \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \, dt \right] \\ &= 4a^3 b \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi a^3 b. \end{aligned}$$

(2) 如图 10-57, $D = \left\{ (x, y) \mid -3\sqrt{\frac{x}{2}} \leq y \leq 3\sqrt{\frac{x}{2}}, 0 \leq x \leq 2 \right\}$.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}} y^2 dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{27}{2\sqrt{2}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{72}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \int_0^2 x^2 dx \int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}} dy \\ &= 2 \int_0^2 \frac{3}{\sqrt{2}} x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{96}{7}. \end{aligned}$$

$$(3) I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = \frac{ab^3}{3},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \frac{a^3 b}{3}.$$

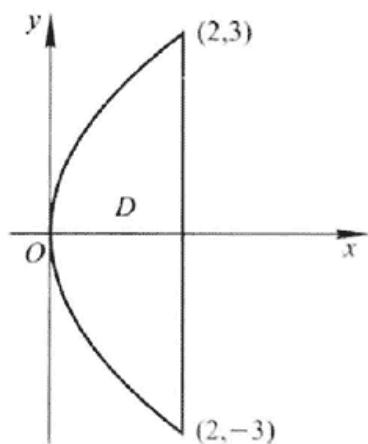


图 10-57

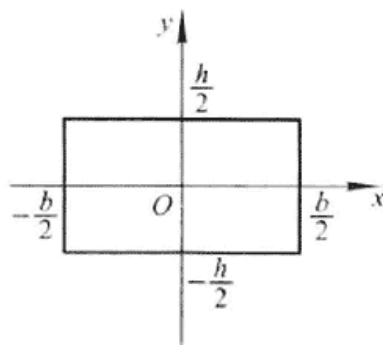


图 10-58

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h , 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 建立如图 10-58 的坐标系, 使原点 O 为矩形板的形心, x 轴和 y 轴分别平行于矩形的两边, 则所求的转动惯量为

$$I_x = \iint_D y^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} \mu b h^3,$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy = \frac{1}{12} \mu h b^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0, |x| = a, |y| = a$ 所围成.

- (1) 求物体的体积;
 (2) 求物体的质心;
 (3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

解 (1) 如图 10-59, 由 Ω 的对称性可知

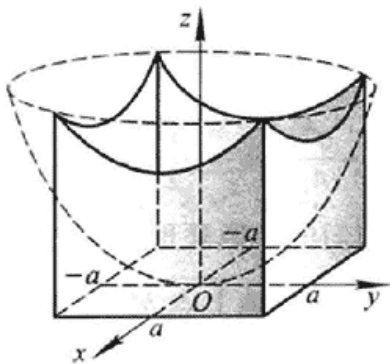


图 10-59

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \\
 &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy \\
 &= 4 \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \frac{8}{3} a^4.
 \end{aligned}$$

- (2) 由对称性可知, 质心位于 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned}
 \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv \stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz \\
 &= \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a \frac{1}{2} (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy \\
 &= \frac{2}{V} \int_0^a \left(ax^4 + \frac{2}{3} a^3 x^2 + \frac{1}{5} a^5 \right) dx = \frac{7}{15} a^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad I_z &= \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + y^2) dv \stackrel{\text{对称性}}{=} 4 \rho \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2 + y^2) dz \\
 &= 4 \rho \int_0^a dx \int_0^a (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy \\
 &= \frac{112}{45} \rho a^6.
 \end{aligned}$$

12. 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量 (设密度 $\mu = 1$).

解 建立空间直角坐标系, 使原点位于圆柱体的中心, z 轴平行于母线, 则圆柱体所占的空间闭区域

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\}$$

$$\text{柱面坐标} \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot h = \frac{1}{2} \pi h a^4. \end{aligned}$$

13. 设面密度为常量 μ 的质量均匀的半圆环形薄片占有闭区域 $D = \{(x, y, 0) \mid R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2, x \geq 0\}$, 求它对位于 z 轴上点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > 0$) 处单位质量的质点的引力 F .

解 如图 10-60, 引力元素 dF 沿 x 轴和 z 轴的分量分别为

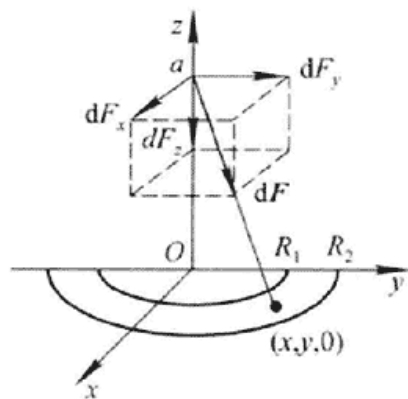


图 10-60

$$dF_x = G \frac{\mu x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma$$

和

$$dF_z = G \frac{\mu(-a)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma.$$

于是

$$\begin{aligned} F_x &= G\mu \iint_D \frac{x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho \cos \theta}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho d\rho \\ &= G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\ &= 2G\mu \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \quad (\text{令 } \rho = a \tan t \text{ 换元}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2G\mu \int_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}} \frac{a^2 \tan^2 t}{a^3 \sec^3 t} \cdot a \sec^2 t dt \\
&= 2G\mu \int_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}} (\sec t - \cos t) dt \\
&= 2G\mu \left[\ln(\sec t + \tan t) - \sin t \right]_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}} \\
&= 2G\mu \left(\ln \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + a^2} + R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right), \\
F_z &= -Ga\mu \iint_D \frac{d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\stackrel{\text{极坐标}}{=} -Ga\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\
&= \pi Ga\mu \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right]_{R_1}^{R_2} \\
&= \pi Ga\mu \left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right).
\end{aligned}$$

由于 D 关于 x 轴对称, 且质量均匀分布, 故 $F_y = 0$. 因此引力

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \left(2G\mu \left(\ln \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + a^2} + R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right), 0, \right. \\
&\quad \left. \pi Ga\mu \left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right) \right).
\end{aligned}$$

 14. 设均匀柱体密度为 ρ , 占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > h$) 处的单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性和质量分布的均匀性知 $F_x = F_y = 0$. 引力沿 z 轴的分量

$$\begin{aligned}
F_z &= \iiint_{\Omega} G\rho \frac{z-a}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} dv \\
&= G\rho \int_0^h (z-a) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\stackrel{\text{柱面坐标}}{=} G\rho \int_0^h (z-a) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{rdr}{[r^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= 2\pi G\rho \int_0^h (z-a) \left[\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-a)^2}} \right] dz \\
&= 2\pi G\rho \int_0^h \left[-1 - \frac{z-a}{\sqrt{R^2 + (z-a)^2}} \right] dz
\end{aligned}$$

$$= -2\pi G\rho[h + \sqrt{R^2 + (h-a)^2} - \sqrt{R^2 + a^2}].$$

*习题 10-5

含参变量的积分

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) dy.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^{1+0} \frac{dy}{1+0+y^2} = [\arctan y]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2} dy = \int_{-1}^1 |y| dy = 2 \int_0^1 y dy = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) dy = \int_0^2 y^2 (\cos 0) dy = \frac{8}{3}.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) \varphi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} (y^2 \sin x - y^3) dy; \quad (2) \varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y} dy;$$

$$(3) \varphi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan \frac{y}{x} dy; \quad (4) \varphi(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

解 (1) $\varphi'(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} y^2 \cos x dy + (\cos^2 x \sin x - \cos^3 x)(\cos x)'$
 $- (\sin^2 x \sin x - \sin^3 x)(\sin x)'$
 $= \frac{1}{3} \cos x (\cos^3 x - \sin^3 x) + (\cos x - \sin x) \sin x \cos^2 x$
 $= \frac{1}{3} \cos x (\cos x - \sin x) (1 + 2 \sin 2x).$

$$(2) \varphi'(x) = \int_0^x \frac{1}{1+xy} dy + \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$= \frac{1}{x} [\ln(1+xy)]_0^x + \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$= \frac{2}{x} \ln(1+x^2).$$

$$(3) \varphi'(x) = \int_{x^2}^{x^3} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) dy + \arctan x^2 \cdot 3x^2 - \arctan x \cdot 2x$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) \Big|_{x^2}^{x^3} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x$$

$$= \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x.$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \varphi'(x) &= \int_x^{x^2} e^{-xy^2} (-y^2) dy + e^{-x^5} \cdot 2x - e^{-x^3} \cdot 1 \\
 &= 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy.
 \end{aligned}$$

3. 设 $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$, 其中 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

$$\text{解 } F'(x) = \int_0^x f(y)dy + 2xf(x),$$

$$F''(x) = f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

4. 应用对参数的微分法, 计算下列积分:

$$(1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1);$$

$$(2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx \quad (a > 0).$$

解 (1) 设

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|\alpha| \leq |a| < 1),$$

则 $\varphi(0) = 0, \varphi(a) = I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\ln \frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{2}{1-\alpha^2 \cos^2 x},$$

故

$$\begin{aligned}
 \varphi'(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-\alpha^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d(\tan x)}{\sec^2 x - \alpha^2} \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan x)}{(1-\alpha^2) + \tan^2 x} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\arctan \frac{\tan x}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 I = \varphi(a) - \varphi(0) &= \int_0^a \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha \\
 &= \pi \arcsin a.
 \end{aligned}$$

(2) 设 $\varphi(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + \alpha^2 \sin^2 x) dx$, 则 $\varphi(1) = 0, \varphi(a) = I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [\ln(\cos^2 x + \alpha^2 \sin^2 x)] = \frac{2\alpha \sin^2 x}{\cos^2 x + \alpha^2 \sin^2 x},$$

故

$$\begin{aligned}
 \varphi'(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha \sin^2 x}{\cos^2 x + \alpha^2 \sin^2 x} dx \\
 &\stackrel{u = \tan x}{=} 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1 + \alpha^2 u^2} \cdot \frac{du}{1 + u^2} \\
 &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \left[\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + \alpha^2 u^2} \right] (\alpha \neq 1) \\
 &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\alpha} \right) = \frac{\pi}{\alpha + 1};
 \end{aligned}$$

又当 $\alpha = 1$ 时,

$$\varphi'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x dx = \frac{\pi}{2},$$

因此 $\varphi'(\alpha)$ 在 $x=1$ 处连续. 从而对任一 $a > 0$, $\varphi'(\alpha)$ 在区间 $[1, a]$ (或 $[a, 1]$) 上连续. 于是

$$I = \varphi(a) - \varphi(1) = \int_1^a \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_1^a \frac{\pi}{\alpha + 1} d\alpha = \pi \ln \frac{a+1}{2}.$$

 5. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(2) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b).$$

解 (1) 因为 $\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}$, 故

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{交换积分次序}) \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2 y^2) \sqrt{1-x^2}} \right] dy,
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2 y^2) \sqrt{1-x^2}} &\stackrel{x = \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2 \sin^2 t} \\
 &\stackrel{u = \tan t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(1+y^2)u^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} [\arctan(\sqrt{1+y^2}u)]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{2} [\ln(y + \sqrt{1+y^2})]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).\end{aligned}$$

(2) 因为 $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$, 故

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx \int_a^b x^y dy \quad (\text{交换积分次序}) \\ &= \int_a^b dy \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx &\stackrel{x=e^{-t}}{=} \int_{+\infty}^0 \sin t \cdot e^{-yt} (-e^{-t}) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-(y+1)t} dt \quad (\text{分部积分}) \\ &= \frac{1}{1+(y+1)^2} e^{-(y+1)t} [\cos t - (y+1) \sin t] \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+(y+1)^2},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2} dy = [\arctan(y+1)]_a^b \\ &= \arctan(b+1) - \arctan(a+1).\end{aligned}$$

总习题十

1. 填空:

(1) 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值是_____;

(2) 设闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy =$ _____.

解 (1) 交换积分次序并计算所得的二次积分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy &= \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 ye^{-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^2 e^{-y^2} d(-y^2) = -\frac{1}{2} [e^{-y^2}]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-4}).\end{aligned}$$

(2) 用极坐标计算. $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$,

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= \iint_D \left(\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2a^2} + \frac{1 - \cos 2\theta}{2b^2} \right) d\theta \\ &= \frac{R^4}{4} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) \cdot 2\pi = \frac{\pi R^4}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned}$$

2. 以下各题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, $\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则有();

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$

(2) 设有平面闭区域 $D = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$. 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = ()$;

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$

(D) 0

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) = ()$.

(A) $2f(2)$

(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$

(D) 0

解 (1) 先说明(A)不正确. 由于 Ω_1 关于 yOz 面对称, 而被积函数 x 关于 x 是奇函数, 故 $\iiint_{\Omega_1} x dv = 0$, 而 $\iiint_{\Omega_2} x dv \neq 0$, 故(A)不正确. 类似可说明(B)和(D)不正确. 再说明(C)是正确的. 设 $\Omega_3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0, x \geq 0\}$. 由于被积函数 z 关于 x 是偶函数, 而 Ω_3 与 $\Omega_1 \setminus \Omega_3$ ①关于 yOz 面对称, 故 $\iiint_{\Omega_1} z dv = 2 \iiint_{\Omega_3} z dv$. 又由于被积

① $\Omega_1 \setminus \Omega_3 = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \Omega_1 \text{ 且 } (x, y, z) \notin \Omega_3\}$, 称为 Ω_1 与 Ω_3 的差集.

函数 z 关于 y 也是偶函数, 且 Ω_2 与 $\Omega_3 \setminus \Omega_2$ 关于 zOx 面对称, 故 $\iiint_{\Omega_1} z dv = 2 \iiint_{\Omega_2} z dv$ ①. 因此应选 (C).

(2) 记 D 的三个顶点为 $A(a, a)$, $B(-a, a)$, $C(-a, -a)$ (图 10-61). 连接 O, B , 则 D 为 $\triangle COB$ 和 $\triangle AOB$ 之并. 由于 $\triangle COB$ 关于 x 轴对称, $\triangle AOB$ 关于 y 轴对称, 而函数 xy 关于 y 和 x 均是奇函数, 从而有

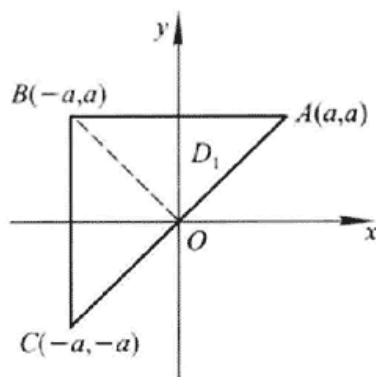


图 10-61

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{\triangle AOB} xy dx dy + \iint_{\triangle COB} xy dx dy = 0 + 0 = 0;$$

又由于函数 $\cos x \sin y$ 关于 y 是奇函数, 关于 x 是偶函数, 从而有

$$\begin{aligned} \iint_D \cos x \sin y dx dy &= \iint_{\triangle COB} \cos x \sin y dx dy + \iint_{\triangle AOB} \cos x \sin y dx dy \\ &= 0 + 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy, \end{aligned}$$

因此应选 (A).

(3) 解法一 由于考虑 $F'(2)$, 故可设 $t > 1$. 对所给二重积分交换积分次序, 得

$$F(t) = \int_1^t f(x) dx \int_1^x dy = \int_1^t (x-1)f(x) dx,$$

于是,

$$F'(t) = (t-1)f(t),$$

从而有 $F'(2) = f(2)$. 故选 (B).

解法二 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$, 则有

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t [G(t) - G(y)] dy \\ &= G(t) \int_1^t dy - \int_1^t G(y) dy = (t-1)G(t) - \int_1^t G(y) dy. \end{aligned}$$

① 关于三重积分中如何利用对称性的问题, 请读者参照本书习题 10-1 第 2 题解的注 (1) (2) 得出有关结论.

求导得

$$F'(t) = G(t) + (t-1)f(t) - G(t) = (t-1)f(t),$$

因此

$$F'(2) = f(2).$$

例 3. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (1+x) \sin y d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域;

(2) $\iint_D (x^2 - y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$;

(3) $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

解 (1) D 可表示为 $0 \leq y \leq 1+x, 0 \leq x \leq 1$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (1+x) \sin y d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{1+x} (1+x) \sin y dy \\ &= \int_0^1 [(1+x) - (1+x) \cos(1+x)] dx \\ &\stackrel{t=1+x}{=} \int_1^2 (t - t \cos t) dt = \left[\frac{t^2}{2} - t \sin t - \cos t \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} + \sin 1 + \cos 1 - 2 \sin 2 - \cos 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由于 } \iint_D x^2 d\sigma &= \int_0^\pi x^2 dx \int_0^{\sin x} dy \\ &= \int_0^\pi x^2 \sin x dx = -[x^2 \cos x]_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos x dx \\ &= \pi^2 + 2 \left(x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \right) = \pi^2 - 4, \\ \iint_D y^2 d\sigma &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx^{(1)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \end{aligned}$$

① 一般有: $\int_0^\pi \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, 参阅本书上册习题 5-3 第 7(13) 题的解答.

故
$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 - y^2) d\sigma &= \iint_D x^2 d\sigma - \iint_D y^2 d\sigma = (\pi^2 - 4) - \frac{4}{9} \\ &= \pi^2 - \frac{40}{9}.\end{aligned}$$

(3) 利用极坐标计算. 在极坐标系中,

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma &= \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3} [(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{R^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right).\end{aligned}$$

注 如果忽略 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上非正, 而按 $(R^2 - R^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = R^3 \sin^3 \theta$ 计算, 将导致错误. 这是一类常见错误, 要注意避免.

(4) 利用对称性可知 $\iint_D 3x d\sigma = 0, \iint_D 6y d\sigma = 0$. 又

$$\begin{aligned}\iint_D 9 d\sigma &= 9 \times (D \text{ 的面积}) = 9\pi R^2, \\ \iint_D y^2 d\sigma &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{4} R^4,\end{aligned}$$

因此

$$\text{原式} = \frac{\pi}{4} R^4 + 9\pi R^2.$$

 4. 交换下列二次积分的次序:

$$(1) \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

解 (1) 所给的二次积分等于闭区域 D 上的二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y} \leq x \leq \frac{1}{2}(y-4), 0 \leq y \leq 4\}$ (图 10-62), 将 D 表达为 $2x+4 \leq y \leq 4-x^2, -2 \leq x \leq 0$, 则得

$$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx = \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

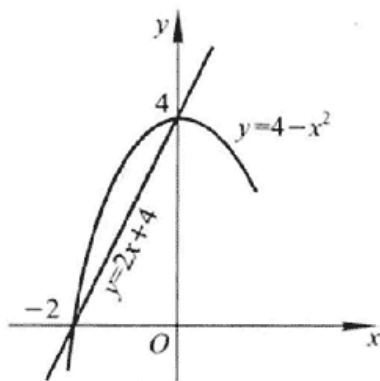


图 10-62

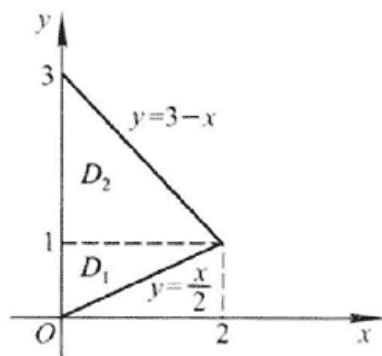


图 10-63

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3-y, 1 \leq y \leq 3\}$ (图 10-63). D 可表达为 $\{(x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq 3-x, 0 \leq x \leq 2\}$, 于是

$$\text{原式} = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy.$$

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid \sqrt{x} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$ (图 10-64). 将 D 表达为 $D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}, 1 \leq y \leq 2\}$, 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

5. 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

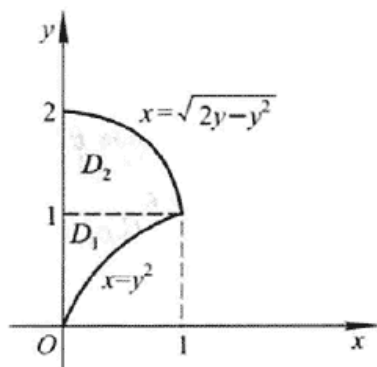


图 10-64

证 上式左端的二次积分等于二重积分 $\iint_D e^{m(a-x)} f(x) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq a\} = \{(x, y) \mid x \leq y \leq a, 0 \leq x \leq a\}$. 于是交换积分次序即得

$$\begin{aligned} \int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx &= \int_0^a dx \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) dy \\ &= \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx. \end{aligned}$$

6. 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$.

解 积分区域 D 如图 10-65 所示. 抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程为 $\rho = \sec \theta \tan \theta$, 直线 $y = 1$ 的极坐标方程为 $\rho = \csc \theta$, 用射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 将 D 分成 D_1, D_2, D_3 三部分:

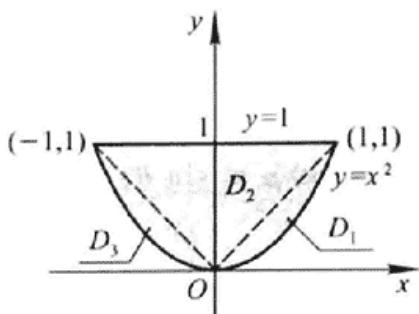


图 10-65

$$D_1: 0 \leq \rho \leq \sec \theta \tan \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4};$$

$$D_2: 0 \leq \rho \leq \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4};$$

$$D_3: 0 \leq \rho \leq \sec \theta \tan \theta, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi.$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \\ &\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \\ &\quad \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

7. 设 $f(x, y)$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0\}$ 上连续, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy,$$

求 $f(x, y)$.

解 设 $\iint_D f(x, y) dx dy = A$, 则

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} A,$$

从而

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - \frac{8}{\pi} A \iint_D dx dy,$$

又

$$\iint_D dx dy = D \text{ 的面积} = \frac{\pi}{8},$$

故得

$$A = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - A,$$

因此

$$A = \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy.$$

在极坐标系中,

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

因此

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9},$$

于是得

$$A = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9}.$$

从而

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \frac{8}{9\pi} - \frac{2}{3}.$$

8. 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为三次积分, 其中积分区域 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$,

$y = x^2$ 及平面 $y = 1, z = 0$ 所围成的闭区域.

解 Ω 为一曲顶柱体, 其顶为 $z = x^2 + y^2$, 底位于 xOy 面上, 其侧面由抛物柱面 $y = x^2$ 及平面 $y = 1$ 所组成. 由此可知 Ω 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

9. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是两个球: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ ($R >$

0) 的公共部分;

(2) $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域.

解 (1) 解法一 利用直角坐标, 采用“先重后单”的积分次序.

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz \end{cases}$ 解得 $z = \frac{R}{2}$, 于是用平面 $z = \frac{R}{2}$ 把 Ω 分成 Ω_1 和 Ω_2 两部分,

其中

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2Rz - z^2, 0 \leq z \leq \frac{R}{2} \right\};$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2, \frac{R}{2} \leq z \leq R \right\} \text{ (图 10-66)}.$$

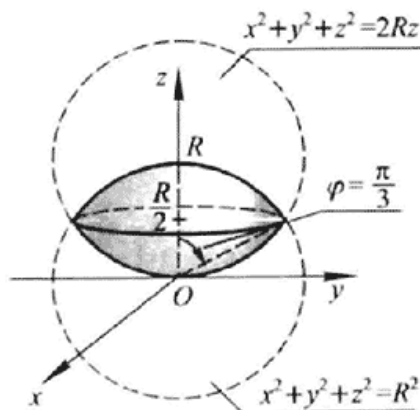


图 10-66

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{\Omega_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} z^2 dx dy dz \\
 &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2Rz-z^2} dx dy + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{R}{2}} \pi(2Rz - z^2) \cdot z^2 dz + \int_{\frac{R}{2}}^R \pi(R^2 - z^2) \cdot z^2 dz \\
 &= \frac{1}{40}\pi R^5 + \frac{47}{480}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5.
 \end{aligned}$$

* 解法二 利用球面坐标计算. 作圆锥面 $\varphi = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, 将 Ω 分成 Ω'_1 和 Ω'_2 两部分:

$$\Omega'_1 = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\};$$

$$\Omega'_2 = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2R \cos \varphi, \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{\Omega'_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{\Omega'_2} z^2 dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \\
 &\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^4 dr \\
 &= \frac{7}{60}\pi R^5 + \frac{1}{160}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5.
 \end{aligned}$$

(2) 由于积分区域 Ω 关于 xOy 面对称, 而被积函数关于 z 是奇函数, 故所求积分等于零.

(3) 积分区域 Ω 由旋转抛物面 $y^2 + z^2 = 2x$ 和平面 $x = 5$ 所围成, Ω 在 yOz 面上的投影区域

$$D_{yz} = \{(y, z) \mid y^2 + z^2 \leq 10\}.$$

因此 Ω 可表示为

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2) \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y^2 + z^2 \leq 10.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv &= \iint_{D_{xy}} (y^2 + z^2) dydz \int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^5 dx \\
 &= \iint_{D_{xy}} (y^2 + z^2) \left(5 - \frac{y^2 + z^2}{2} \right) dydz \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_{D_{xy}} \rho^2 \left(5 - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{10}} \rho^3 \left(5 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho \\
 &= \frac{250}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

注 根据本题的积分区域 Ω 的特点, 应将 Ω 向 yOz 面投影, 即采用先对 x 、后对 y 和 z 的积分次序较宜.

* 10. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}, \\
 G(t) &= \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx},
 \end{aligned}$$

其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

解 (1) 利用球面坐标,

$$\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

利用极坐标,

$$\begin{aligned}
 \iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho = 2\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^t f(r^2) r dr.
 \end{aligned}$$

于是

$$F(t) = \frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr},$$

求导得

$$F'(t) = \frac{2tf(t^2) \int_0^t f(r^2) r(t-r) dr}{\left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2},$$

所以在区间 $(0, +\infty)$ 内, $F'(t) > 0$, 故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

(2) 证 因为 $f(x^2)$ 为偶函数, 故

$$\int_{-t}^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(r^2) dr.$$

所以

$$G(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr}{2 \int_0^t f(r^2) dr} = \frac{\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr}.$$

要证明 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$, 即证

$$\frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr} > \frac{2 \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr},$$

只需证当 $t > 0$ 时, $H(t) = \int_0^t f(r^2) r^2 dr \cdot \int_0^t f(r^2) dr - \left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2 > 0$. 由于 $H(0) = 0$, 且

$$H'(t) = f(t^2) \int_0^t f(r^2) (t-r)^2 dr > 0,$$

所以 $H(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 又 $H(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 故当 $t > 0$ 时,

$$H(t) > H(0) = 0.$$

因此当 $t > 0$ 时, 有

$$F(t) > \frac{2}{\pi} G(t).$$

 11. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面方程为 $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$, 它被三坐标面割出的有限部分在 xOy 面上的

投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、 y 轴和直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 所围成的三角形区域. 于是所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{|ab|} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \iiint_D dx dy \\
 &= \frac{1}{|ab|} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \cdot \frac{1}{2} |ab| \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.
 \end{aligned}$$

12. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上,要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片,为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上,问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设矩形另一边的长度为 l 并建立如图 10-67 所示的坐标系,则质心的纵标

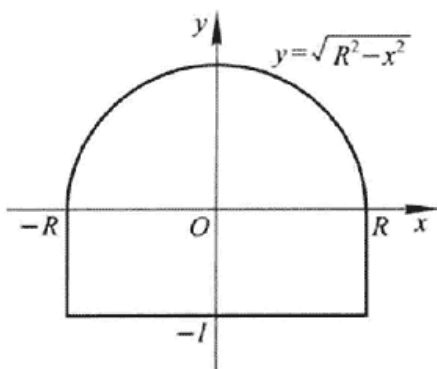


图 10-67

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{\iint_D y d\sigma}{A} = \frac{\int_{-R}^R dx \int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy}{A} \\
 &= \frac{\int_{-R}^R (R^2 - x^2 - l^2) dx}{2A} = \frac{\frac{2}{3}R^3 - l^2 R}{A},
 \end{aligned}$$

由题设 $\bar{y} = 0$ 即可算得

$$l = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

13. 求由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ)对于直线 $y = -1$ 的转动惯量.

解 闭区域 $D = \{(x, y) \mid -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}$, 所求的转动惯量为

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \mu (y+1)^2 d\sigma = \mu \int_0^1 (y+1)^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \\
 &= 2\mu \int_0^1 \sqrt{y} (y+1)^2 dy \\
 &= 2\mu \int_0^1 (y^{\frac{5}{2}} + 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) dy
 \end{aligned}$$

$$= \frac{368}{105}\mu.$$

14. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的质量均匀的半圆形薄片, 占有平面闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$, 过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P , $OP = a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 求解本题时, 所有的分析和计算过程均与习题 10-4 的第 13 题雷同, 故这里略去详细的计算步骤.

积分区域 $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

由于 D 关于 y 轴对称, 且质量均匀分布, 故 $F_x = 0$. 又薄片的面密度 $\mu = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} =$

$\frac{2M}{\pi R^2}$, 于是

$$\begin{aligned} F_y &= Gm\mu \iint_D \frac{y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} Gm\mu \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho \sin \theta}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho d\rho \\ &= 2Gm\mu \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\ &= \frac{4GmM}{\pi R^2} \left(\ln \frac{\sqrt{R^2 + a^2} + R}{a} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right), \\ F_z &= -Gm\mu \iint_D \frac{d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -Gm\mu \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\ &= -\frac{2GmM}{R^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right) \\ &= -\frac{2GmM}{R^2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right), \end{aligned}$$

所求引力为 $F = (0, F_y, F_z)$.

15. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$ 的质心.

解 设质心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性知质心位于 z 轴上, 即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 由于

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^b z dz \iint_{D_z} dx dy \quad \left(\text{其中 } D_z = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \left(1 - \frac{z^2}{b^2} \right) \right\} \right) \\ &= \int_0^b \pi a^2 \left(1 - \frac{z^2}{b^2} \right) z dz \end{aligned}$$

$$= \pi a^2 \int_0^b \left(z - \frac{z^3}{b^2} \right) dz = \frac{\pi a^2 b^2}{4},$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3},$$

因此

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi a^2 b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}} = \frac{3b}{8},$$

即质心为 $\left(0, 0, \frac{3b}{8}\right)$.

 * 16. 一球形行星的半径为 R , 其质量为 M , 其密度呈球对称分布, 并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零, 则行星中心的密度是多少?

解 设行星中心的密度为 μ_0 , 则由题设, 在距球心 r ($0 \leq r \leq R$) 处的密度为 $\mu(r) = \mu_0 - kr$. 由于 $\mu(R) = \mu_0 - kR = 0$, 故 $k = \frac{\mu_0}{R}$, 即

$$\mu(r) = \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right).$$

于是,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{r \leq R} \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right) r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R} \right) r^2 \, dr \\ &= 4\pi \mu_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R} \right) r^2 \, dr = \frac{\mu_0 \pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

因此得

$$\mu_0 = \frac{3M}{\pi R^3}.$$

习题 11-1

对弧长的曲线积分

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L , 在点 (x, y) 处它的线密度为 $\mu(x, y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x, I_y ;

(2) 这曲线弧的质心坐标 $\bar{x}, \bar{y}$.

解 (1) 设想将 L 分成 n 个小弧段, 取出其中任意一段记作 ds (其长度也记作 ds), (x, y) 为 ds 上一点, 则 ds 对 x 轴和对 y 轴的转动惯量近似等于

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) ds, \quad dI_y = x^2 \mu(x, y) ds.$$

以此作为转动惯量元素并积分, 即得 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量:

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) ds, \quad I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) ds.$$

(2) ds 对 x 轴和对 y 轴的静矩近似等于

$$dM_x = y \mu(x, y) ds, \quad dM_y = x \mu(x, y) ds.$$

以此作为静矩元素并积分, 即得 L 对 x 轴、对 y 轴的静矩:

$$M_x = \int_L y \mu(x, y) ds, \quad M_y = \int_L x \mu(x, y) ds.$$

从而 L 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

证 设对积分弧段 L 任意分割成 n 个小弧段, 第 i 个小弧段的长度为 Δs_i , (ξ_i, η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点. 按假设, 有

$$f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \leq g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

令 $\lambda = \max \{ \Delta s_i \} \rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds.$$

又 $f(x, y) \leq |f(x, y)|$, $-f(x, y) \leq |f(x, y)|$, 利用以上结果, 得

$$\begin{aligned}\int_L f(x, y) ds &\leq \int_L |f(x, y)| ds, \\ -\int_L f(x, y) ds &\leq \int_L |f(x, y)| ds,\end{aligned}$$

即

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds.$$

 3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$;

(2) $\int_L (x + y) ds$, 其中 L 为连接 $(1, 0)$ 及 $(0, 1)$ 两点的直线段;

(3) $\oint_L x ds$, 其中 L 为由直线 $y = x$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域的整个边界;

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$, 其中 Γ 为曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

(6) $\int_\Gamma x^2 y z ds$, 其中 Γ 为折线 $ABCD$, 这里 A, B, C, D 依次为点 $(0, 0, 0), (0, 0, 2), (1, 0, 2), (1, 3, 2)$;

(7) $\int_L y^2 ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$;

(8) $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 为曲线 $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\oint_L (x^2 + y^2)^n ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^n \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^{2n+1} dt = 2\pi a^{2n+1}.\end{aligned}$$

(2) 直线 L 的方程为 $y = 1 - x (0 \leq x \leq 1)$.

$$\int_L (x + y) ds = \int_0^1 [x + (1 - x)] \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

(3) L 由 L_1 和 L_2 两段组成, 其中 $L_1: y = x (0 \leq x \leq 1)$, $L_2: y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$. 于是

$$\begin{aligned}\oint_L x ds &= \int_{L_1} x ds + \int_{L_2} x ds = \int_0^1 x \sqrt{1+1^2} dx + \int_0^1 x \sqrt{1+(2x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2} x dx + \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx \\ &= \frac{1}{12} (5\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

(4) L 由线段 $OA: y = 0 (0 \leq x \leq a)$, 圆弧 $\widehat{AB}: x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4})$ 和线段 $OB: y = x (0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}})$ 组成 (图 11-1).

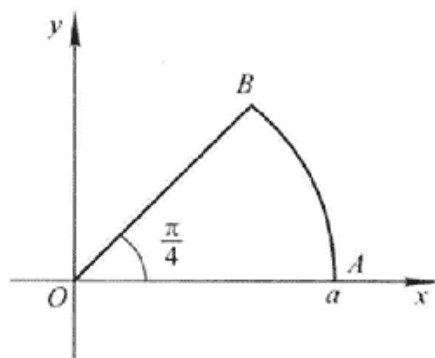


图 11-1

$$\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx = e^a - 1,$$

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a e^a dt = \frac{\pi}{4} a e^a,\end{aligned}$$

$$\int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{1+1^2} dx = e^a - 1,$$

于是 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = e^a - 1 + \frac{\pi}{4} a e^a + e^a - 1 = e^a \left(2 + \frac{\pi a}{4} \right) - 2.$

$$\begin{aligned}(5) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt \\ &= \sqrt{3} e^t dt, \\ \int_0^2 \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds &= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} \cdot \sqrt{3} e^t dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^2 e^{-t} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - e^{-2}).\end{aligned}$$

(6) Γ 由直线段 AB, BC 和 CD 组成, 其中

$$AB: x=0, y=0, z=t (0 \leq t \leq 2); \quad BC: x=t, y=0, z=2 (0 \leq t \leq 1);$$

$$CD: x=1, y=t, z=2 (0 \leq t \leq 3).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x^2 y z ds &= \int_{AB} x^2 y z ds + \int_{BC} x^2 y z ds + \int_{CD} x^2 y z ds \\ &= \int_0^2 0 dt + \int_0^1 0 dt + \int_0^3 2t dt = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \sqrt{2}a \sqrt{1 - \cos t} dt, \\ \int_{\Gamma} y^2 ds &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot \sqrt{2}a \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= \sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}} dt = \sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}} dt \\ &\stackrel{u = \frac{t}{2}}{=} 16a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 u du \\ &= 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u du \text{ ①} = 32a^3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{15}a^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2} dt = a dt, \\ \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} [a^2(\cos t + t \sin t)^2 + a^2(\sin t - t \cos t)^2] \cdot a dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^3(1 + t^2) dt = 2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2). \end{aligned}$$

4. 求半径为 a 、中心角为 2φ 的均匀圆弧 (线密度 $\mu=1$) 的质心.

解 取坐标系如图 11-2 所示, 则由对称性知

$$\bar{y} = 0.$$

又 $M = \int_{\Gamma} \mu ds = \int_{\Gamma} ds = 2\varphi a$ (也可由圆弧的弧长公式直接得出),

故

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_{\Gamma} x \mu ds}{M} = \frac{\int_{-\varphi}^{\varphi} a \cos t \cdot a dt}{2\varphi a} \\ &= \frac{2a^2 \sin \varphi}{2\varphi a} = \frac{a \sin \varphi}{\varphi}, \end{aligned}$$

① 参阅教材上册第五章第三节例 12.

所求圆弧的质心的位置为 $\left(\frac{a \sin \varphi}{\varphi}, 0\right)$.

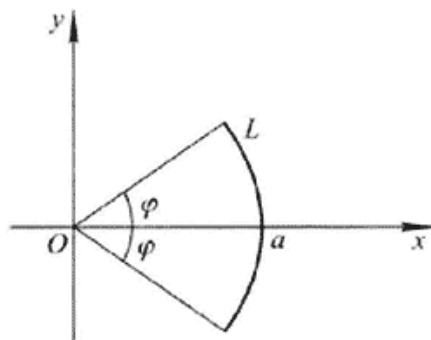


图 11-2

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$, 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 它的线密度 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 求:

- (1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z ;
- (2) 它的质心.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (1) \quad I_z &= \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + z^2) ds \\
 &= \int_0^{2\pi} a^2 (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + k^2} dt \\
 &= a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) dt \\
 &= \frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2).
 \end{aligned}$$

(2) 设质心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

$$\begin{aligned}
 M &= \int_L \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\
 &= \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\
 &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2), \\
 \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_L x \rho(x, y, z) ds = \frac{1}{M} \int_L x (x^2 + y^2 + z^2) ds \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \cos t (a^2 + k^2 t^2) \cdot \sqrt{a^2 + k^2} dt \\
 &= \frac{a \sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \cos t dt,
 \end{aligned}$$

由于 $\int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \cos t dt = [(a^2 + k^2 t^2) \sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t \cdot 2k^2 t dt$

$$= [2k^2 t \cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2k^2 \cos t dt = 4\pi k^2,$$

因此

$$\bar{x} = \frac{a\sqrt{a^2+k^2} \cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2 k^2)} = \frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2 k^2}.$$

类似的,

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{M} \int_L y(x^2+y^2+z^2) ds = \frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M} \int_0^{2\pi} (a^2+k^2 t^2) \sin t dt \\ &= \frac{a\sqrt{a^2+k^2} \cdot (-4\pi^2 k^2)}{M} = \frac{-6\pi a k^2}{3a^2+4\pi^2 k^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{M} \int_L z(x^2+y^2+z^2) ds = \frac{k\sqrt{a^2+k^2}}{M} \int_0^{2\pi} t(a^2+k^2 t^2) dt \\ &= \frac{k\sqrt{a^2+k^2}(2a^2\pi^2+4k^2\pi^4)}{M} = \frac{3\pi k(a^2+2\pi^2 k^2)}{3a^2+4\pi^2 k^2}.\end{aligned}$$

习题 11-2

对坐标的曲线积分

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段, 证明:

$$\int_L P(x, y) dx = 0.$$

证 将 L 的方程表达为如下的参数形式:

$$\begin{cases} x=a, \\ y=t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } \alpha \text{ 变到 } \beta.$$

于是由第二类曲线积分的计算公式, 得

$$\int_L P(x, y) dx = \int_\alpha^\beta P(a, t) \cdot 0 dt = 0.$$

注 本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质:

如果 L 为垂直于 x 轴的有向线段, 则 $\int_L P(x, y) dx = 0$; 如果 L 为垂直于 y 轴的有

向线段, 则 $\int_L Q(x, y) dy = 0$. 这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算.

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a, 0)$ 到点 $(b, 0)$ 的一段直线, 证明:

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

证 将 L 的方程表达为如下的参数形式:

$$\begin{cases} x=x, \\ y=0, \end{cases} \quad x \text{ 从 } a \text{ 变到 } b,$$

于是

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$ 的一段弧;

(2) $\oint_L xy dx$, 其中 L 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

(3) $\int_L y dx + x dy$, 其中 L 为圆周 $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;

(4) $\oint_L \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (按逆时针方向绕行);

(5) $\int_r x^2 dx + z dy - y dz$, 其中 Γ 为曲线 $x = k\theta$, $y = a \cos \theta$, $z = a \sin \theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;

(6) $\int_r x dx + y dy + (x+y-1) dz$, 其中 Γ 是从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(2, 3, 4)$ 的一段直线;

(7) $\oint_r dx - dy + y dz$, 其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$, 这里的 A, B, C 依次为点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;

(8) $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(-1, 1)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.

解 (1)
$$\begin{aligned} \int_L (x^2 - y^2) dx &= \int_0^2 (x^2 - x^4) dx \\ &= -\frac{56}{15}. \end{aligned}$$

(2) 如图 11-3, L 由 L_1 和 L_2 所组成, 其中 L_1 为有向半圆弧;

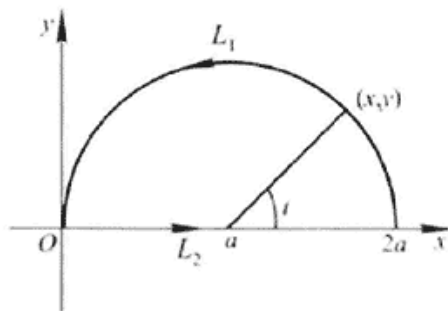


图 11-3

$$\begin{cases} x = a + a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } \pi;$$

L_2 为有向线段 $y=0, x$ 从 0 变到 $2a$. 于是

$$\begin{aligned}\oint_L xy dx &= \int_{L_1} xy dx + \int_{L_2} xy dx \\ &= \int_0^\pi a(1 + \cos t) \cdot a \sin t \cdot (-a \sin t) dt + 0 \\ &= -a^3 \left(\int_0^\pi \sin^2 t dt + \int_0^\pi \sin^2 t \cos t dt \right) \\ &= -a^3 \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = -\frac{\pi}{2} a^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \int_L y dx + x dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [R \sin t \cdot (-R \sin t) + R \cos t \cdot R \cos t] dt \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = 0.\end{aligned}$$

(4) L 的参数方程为 $x = a \cos t, y = a \sin t, t$ 从 0 变到 2π . 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [a(\cos t + \sin t) \cdot (-a \sin t) - a(\cos t - \sin t) \cdot a \cos t] dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} (-a^2) dt = -2\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \quad \int_\Gamma x^2 dx + z dy - y dz \\ &= \int_0^\pi [k^2 \theta^2 \cdot k + a \sin \theta \cdot (-a \sin \theta) - a \cos \theta \cdot (a \cos \theta)] d\theta \\ &= \int_0^\pi (k^3 \theta^2 - a^2) d\theta = \frac{1}{3} k^3 \pi^3 - a^2 \pi.\end{aligned}$$

(6) 直线 Γ 的参数方程为: $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t, t$ 从 0 变到 1. 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 [(1+t) \cdot 1 + (1+2t) \cdot 2 + (1+t+1+2t-1) \cdot 3] dt \\ &= \int_0^1 (6 + 14t) dt = 13.\end{aligned}$$

(7) Γ 由有向线段 AB, BC, CA 依次连接而成, 其中

$AB: x = 1 - t, y = t, z = 0, t$ 从 0 变到 1;

$BC: x = 0, y = 1 - t, z = t, t$ 从 0 变到 1;

$CA: x = t, y = 0, z = 1 - t, t$ 从 0 变到 1.

$$\int_{AB} dx - dy + y dz = \int_0^1 [(-1) - 1 + 0] dt = -2,$$

$$\int_{BC} dx - dy + y dz = \int_0^1 [0 - (-1) + (1-t) \cdot 1] dt = \int_0^1 (2-t) dt = \frac{3}{2},$$

$$\int_{C_1} dx - dy + ydz = \int_0^1 (1 - 0 + 0) dt = 1,$$

因此

$$\oint_C dx - dy + ydz = -2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

(8)

$$\begin{aligned} & \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy \\ &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x \cdot x^2) + (x^4 - 2x \cdot x^2) \cdot 2x] dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-4x^4 + x^2) dx = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

 4. 计算 $\int_L (x+y) dx + (y-x) dy$, 其中 L 是:

- (1) 抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧;
- (2) 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的直线段;
- (3) 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$, 然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线;
- (4) 曲线 $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

解 (1) 化为对 y 的定积分. $L: x = y^2, y$ 从 1 变到 2,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 [(y^2 + y) \cdot 2y + (y - y^2) \cdot 1] dy \\ &= \int_1^2 (2y^3 + y^2 + y) dy = \frac{34}{3}. \end{aligned}$$

(2) L 的方程为 $y - 1 = \frac{2-1}{4-1}(x-1)$, 即 $x = 3y - 2, y$ 从 1 变到 2. 化为对 y 的定积分计算, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 [(3y - 2 + y) \cdot 3 + (y - 3y + 2) \cdot 1] dy \\ &= \int_1^2 (10y - 4) dy = 11. \end{aligned}$$

(3) 记 L_1 为从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$ 的有向线段, L_2 为从点 $(1,2)$ 到点 $(4,2)$ 的有向线段. 则 $L_1: x = 1, y$ 从 1 变到 2; $L_2: y = 2, x$ 从 1 变到 4. 在 L_1 上, $dx = 0$; 在 L_2 上, $dy = 0$. 于是

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (x+y) dx + (y-x) dy &= \int_1^2 (y-1) dy = \frac{1}{2}, \\ \int_{L_2} (x+y) dx + (y-x) dy &= \int_1^4 (x+2) dx = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

因此

$$\text{原式} = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14.$$

(4) 由 $\begin{cases} 2t^2 + t + 1 = 1, \\ t^2 + 1 = 1 \end{cases}$ 可得 $t = 0$; 由 $\begin{cases} 2t^2 + t + 1 = 4, \\ t^2 + 1 = 2 \end{cases}$ 可得 $t = 1$. 因此

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 [(2t^2 + t + 1 + t^2 + 1) \cdot (4t + 1) + (t^2 + 1 - 2t^2 - t - 1) \cdot 2t] dt \\ &= \int_0^1 (10t^3 + 5t^2 + 9t + 2) dt = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

5. 一力场由沿横轴正方向的恒力 F 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解 依题意, $F = (|F|, 0)$, $L: x = R \cos t, y = R \sin t, t$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$, 因此

$$\begin{aligned} W &= \int_L F \cdot dr = \int_L |F| dx + 0 dy \\ &= |F| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-R \sin t) dt = -|F|R. \end{aligned}$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致, 求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移到 (x_2, y_2, z_2) 时重力所作的功.

解 重力 $F = (0, 0, mg)$, 质点移动的直线路径 L 的方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1.$$

于是

$$\begin{aligned} W &= \int_L F \cdot dr = \int_L 0 dx + 0 dy + mg dz \\ &= \int_0^1 mg(z_2 - z_1) dt = mg(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 化成对弧长的曲线积分, 其中 L 为:

- (1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;
- (2) 沿抛物线 $y = x^2$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;
- (3) 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$.

解 (1) L 为从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的有向线段, 其上任一点处的切向量的方向余

弦满足 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 于是

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds \\ &= \int_L \frac{P(x, y) + Q(x, y)}{\sqrt{2}} ds. \end{aligned}$$

(2) L 由如下的参数方程给出: $x = x, y = x^2, x$ 由小到大地从 0 变到 1 , 故 L 的切

向量为 $\tau = (1, y'(x)) = (1, 2x)$, 其方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}},$$

于是
$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L \frac{P(x, y) + 2xQ(x, y)}{\sqrt{1 + 4x^2}} ds.$$

(3) L 由如下的参数方程给出: $x = x, y = \sqrt{2x - x^2}$, x 由小到大地从 0 变到 1, 故 L 的切向量的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}} = \sqrt{2x-x^2}, \\ \cos \beta &= \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot \sqrt{2x-x^2} = 1-x, \end{aligned}$$

于是

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L [\sqrt{2x-x^2} P(x, y) + (1-x) Q(x, y)] ds.$$

例 8. 设 Γ 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐标的曲线积分 $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$ 化成对弧长的曲线积分.

解 $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 2t = 2x, \frac{dz}{dt} = 3t^2 = 3y$, 注意到参数 t 由小变到大, 因此 Γ 的切向量的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{3y}{\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}}. \end{aligned}$$

从而

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} \frac{P + 2xQ + 3yR}{\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}} ds.$$

习题 11-3

格林公式及其应用

例 1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域 D 的正向边界曲线;

(2) $\oint_L (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 L 是四个顶点分别为 $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ 和 $(0,2)$ 的正方形区域的正向边界.

解 (1) 先按曲线积分的计算公式直接计算. 记 $L_1: y = x^2, x$ 从 0 变到 1; $L_2: x = y^2, y$ 从 1 变到 0 (图 11-4). 于是

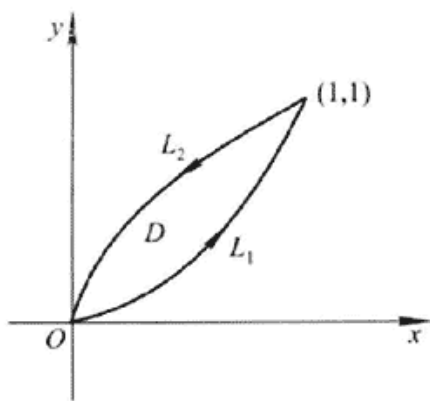


图 11-4

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{L_1} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy + \int_{L_2} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy \\
 &= \int_0^1 [(2x^3 - x^2) + (x + x^4) \cdot 2x] dx + \int_1^0 [(2y^3 - y^4) \cdot 2y + (y^2 + y^2)] dy \\
 &= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2) dx + \int_1^0 (-2y^5 + 4y^4 + 2y^2) dy \\
 &= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.
 \end{aligned}$$

$$\text{又, } P = 2xy - x^2, Q = x + y^2, \frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (1 - 2x) dx dy \\
 &= \int_0^1 (1 - 2x) dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx \\
 &= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3) dx = \frac{1}{30}.
 \end{aligned}$$

可见

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

(2) 如图 11-5, L 由有向线段 OA, AB, BC 和 CO 组成.

$$\int_{OA} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3},$$

$$\int_{AB} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_0^2 (y^2 - 4y) dy = \frac{8}{3} - 8,$$

$$\int_{BC} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_2^0 (x^2 - 8x) dx = 16 - \frac{8}{3},$$

$$\int_{CO} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_2^0 y^2 dy = -\frac{8}{3},$$

于是

$$\text{原式} = \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3} - 8 \right) + \left(16 - \frac{8}{3} \right) + \left(-\frac{8}{3} \right) = 8.$$

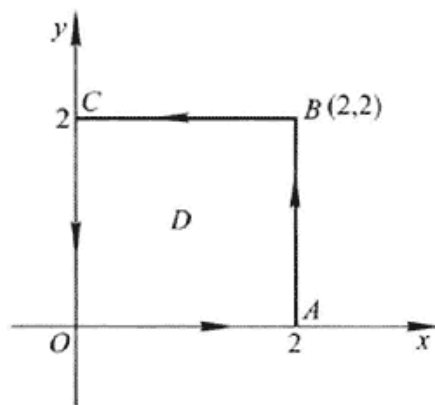


图 11-5

又

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -3xy^2,$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-2y + 3xy^2) dx dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy$$

$$= \int_0^2 (8x - 4) dx = 8,$$

可见

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

2. 利用曲线积分,求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;

(2) 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$;

(3) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$.

解 (1) 正向星形线的参数方程中的参数 t 从 0 变到 2π , 因此

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos^3 t (3a \sin^2 t \cos t) - a \sin^3 t (3a \cos^2 t) (-\sin t)] dt$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3}{8} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

(2) 正向椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 的参数方程为

$$x = 4 \cos t, y = 3 \sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4 \cos t \cdot 3 \cos t - 3 \sin t (-4 \sin t)] dt \\
 &= 6 \int_0^{2\pi} dt = 12\pi.
 \end{aligned}$$

(3) 正向圆周 $x^2 + y^2 = 2ax$, 即 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ 的参数方程为

$$x = a + a \cos t, y = a \sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a + a \cos t) a \cos t - a \sin t (-a \sin t)] dt \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = \pi a^2.
 \end{aligned}$$

例 3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, L 的方向为逆时针方向.

解 在 L 所围的区域内的点 $(0,0)$ 处, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 均无意义. 现取 r 为适当小的正数, 使圆周 l (取逆时针向): $x = r \cos t, y = r \sin t$ (t 从 0 变到 2π) 位于 L 所围的区域内, 则在由 L 和 l^- 所围成的复连通区域 D 上 (图 11-6), 可应用格林公式, 在 D 上,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

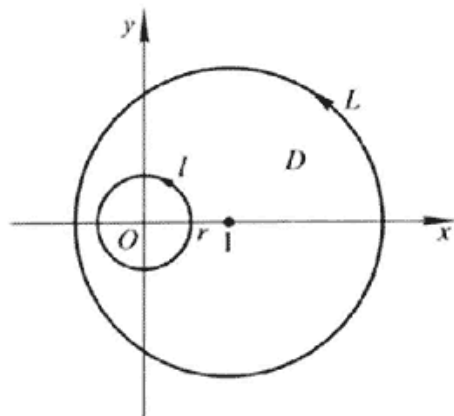


图 11-6

于是由格林公式得

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} + \oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

从而

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} &= \oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t}{2r^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = -\pi. \end{aligned}$$

 4. 确定闭曲线 C , 使曲线积分

$$\oint_C \left(x + \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3 \right) dy$$

达到最大值.

解 记 D 为 C 所围成的平面有界闭区域, C 为 D 的正向边界曲线, 则由格林公式

$$\oint_C \left(x + \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3 \right) dy = \iint_D [(1 - 2x^2) - y^2] dx dy.$$

要使上式右端的二重积分达到最大值, D 应包含所有使被积函数 $1 - 2x^2 - y^2$ 大于零的点, 而不包含使被积函数小于零的点. 因此 D 应由椭圆 $2x^2 + y^2 = 1$ 所围成的闭区域. 这就是说, 当 C 为取逆时针方向的椭圆 $2x^2 + y^2 = 1$ 时, 所给的曲线积分达到最大值.

 5. 设 n 边形的 n 个顶点按逆时针向依次为 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$. 试利用曲线积分证明此 n 边形的面积为

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)].$$

证 n 边形的正向边界 L 由有向线段 $M_1 M_2, M_2 M_3, \dots, M_{n-1} M_n, M_n M_1$ 组成.

有向线段 $M_1 M_2$ 的参数方程为 $x = x_1 + (x_2 - x_1)t, y = y_1 + (y_2 - y_1)t, t$ 从 0 变到 1, 于是

$$\begin{aligned} \int_{M_1 M_2} x dy - y dx &= \int_0^1 \{ [x_1 + (x_2 - x_1)t] (y_2 - y_1) - [y_1 + (y_2 - y_1)t] (x_2 - x_1) \} dt \\ &= \int_0^1 [x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)] dt \\ &= \int_0^1 (x_1 y_2 - x_2 y_1) dt = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned}$$

同理可求得

$$\begin{aligned} \int_{M_2 M_3} x dy - y dx &= x_2 y_3 - x_3 y_2, \dots, \\ \int_{M_{n-1} M_n} x dy - y dx &= x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\int_{M_1 M_n} x dy - y dx = x_n y_1 - x_1 y_n.$$

因此 n 边形的面积

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \left(\int_{M_1 M_2} + \int_{M_2 M_3} + \cdots + \int_{M_{n-1} M_n} + \int_{M_n M_1} \right) x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)]. \end{aligned}$$

6. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值:

$$(1) \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy;$$

$$(2) \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy;$$

$$(3) \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy.$$

解 (1) 函数 $P = x + y, Q = x - y$ 在整个 xOy 面这个单连通区域内, 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MRN , 其中 M 为 $(1,1)$, R 为 $(2,1)$, N 为 $(2,3)$, 则有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 (x+1) dx + \int_1^3 (2-y) dy \\ &= \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

(2) 函数 $P = 6xy^2 - y^3, Q = 6x^2y - 3xy^2$ 在 xOy 面这个单连通区域内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MRN , 其中 M 为 $(1,2)$, R 为 $(3,2)$, N 为 $(3,4)$, 则有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^3 (24x - 8) dx + \int_2^4 (54y - 9y^2) dy \\ &= 80 + 156 = 236. \end{aligned}$$

(3) 函数 $P = 2xy - y^4 + 3, Q = x^2 - 4xy^3$ 在 xOy 面这个单连通区域内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4y^3 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MRN , 其中 M 为 $(1,0)$, R 为

$(2,0)$, N 为 $(2,1)$, 则

$$\text{原式} = \int_1^2 3dx + \int_0^1 (4 - 8y^3)dy = 3 + 2 = 5.$$

 7. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$, 其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$, $(3,0)$

和 $(3,2)$ 的三角形正向边界;

(2) $\oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$;

(3) $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$, 其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧;

(4) $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$, 其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解 (1) 设 D 为 L 所围的三角形闭区域, 则由格林公式,

$$\begin{aligned} \oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D [3 - (-1)] dx dy = 4 \iint_D dx dy = 4 \times (D \text{ 的面积}) = 4 \times 3 = 12. \end{aligned}$$

(2) 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sin x + x^2 \cos x - 2ye^x$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2ye^x,$$

故由格林公式得

$$\text{原式} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 \cdot dx dy = 0.$$

(3) 由于 $P = 2xy^3 - y^2 \cos x$, $Q = 1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \cos x + 6xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改变为折线路径 ORN , 其中 O 为

$(0,0)$, R 为 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, N 为 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ (图 11-7), 得

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \int_0^1 \left(1 - 2y \sin \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi^2}{4} y^2 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(1 - 2y + \frac{3}{4}\pi^2 y^2 \right) dy = \frac{\pi^2}{4}.$$

(4) 由于 $P = x^2 - y$, $Q = -(x + \sin^2 y)$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改为折线路径 ORN , 其中 O 为 $(0,0)$, R 为 $(1,0)$, N 为 $(1,1)$ (图 11-8), 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 (1 + \sin^2 y) dy \\ &= \frac{1}{3} - 1 - \int_0^1 \frac{1 - \cos 2y}{2} dy \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2 = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4} \sin 2. \end{aligned}$$

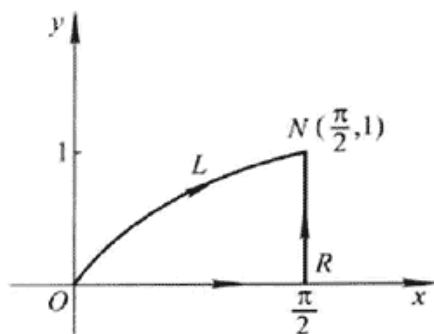


图 11-7

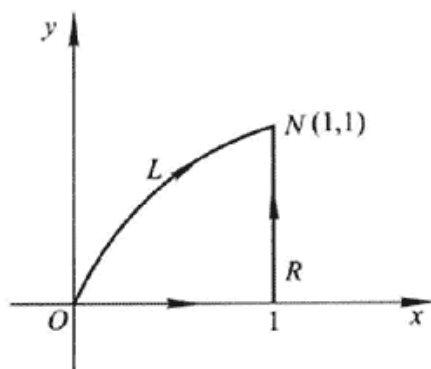


图 11-8

8. 验证下列 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求这样的 $u(x, y)$:

- (1) $(x + 2y)dx + (2x + y)dy$;
- (2) $2xydx + x^2dy$;
- (3) $4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy$;
- (4) $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$;
- (5) $(2x\cos y + y^2\cos x)dx + (2y\sin x - x^2\sin y)dy$.

解 (1) 在整个 xOy 面内, 函数 $P = x + 2y$, $Q = 2x + y$ 具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 = \frac{\partial P}{\partial y}$, 因此所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x x dx + \int_0^y (2x + y) dy \\ &= \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

(2) 在整个 xOy 面内, 函数 $P = 2xy$ 和 $Q = x^2$ 具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x =$

$\frac{\partial P}{\partial y}$, 故所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$u(x, y) = \int_0^x 2x \cdot 0 dx + \int_0^y x^2 dy = x^2 y.$$

(3) 在整个 xOy 面内, $P = 4\sin x \sin 3y \cos x$ 和 $Q = -3\cos 3y \cos 2x$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6\cos 3y \sin 2x = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (-3\cos 3y \cos 2x) dy \\ &= [-\sin 3y \cos 2x]_0^y \\ &= -\cos 2x \sin 3y. \end{aligned}$$

(4) 在整个 xOy 面内, 函数 $P = 3x^2y + 8xy^2$ 和 $Q = x^3 + 8x^2y + 12ye^y$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式为某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (x^3 + 8x^2y + 12ye^y) dy \\ &= x^3y + 4x^2y^2 + 12(ye^y - e^y). \end{aligned}$$

(5) 解法一 在整个 xOy 面内, $P = 2x\cos y + y^2\cos x$ 和 $Q = 2y\sin x - x^2\sin y$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x - 2x\sin y = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y\sin x - x^2\sin y) dy \\ &= y^2\sin x + x^2\cos y. \end{aligned}$$

注 在已经证明了所给表达式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分后, 为了求 $u(x, y)$, 除了采用上面题解中的曲线积分方法外, 还可用以下两种方法:

解法二(偏积分法) 因函数 $u(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 2x\cos y + y^2\cos x,$$

故

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int (2x\cos y + y^2\cos x) dx \\ &= x^2\cos y + y^2\sin x + \varphi(y), \end{aligned}$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的某个可导函数, 由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 \sin y + 2y \sin x + \varphi'(y).$$

又 $u(x, y)$ 必需满足

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = 2y \sin x - x^2 \sin y,$$

从而得 $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C$ (C 为任意常数). 因此

$$u(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \sin x + C,$$

取 $C = 0$, 就得到满足要求的一个 $u(x, y)$.

解法三(凑微分法) 利用微分运算法则直接凑出 $u(x, y)$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (2x \cos y dx - x^2 \sin y dy) + (y^2 \cos x dx + 2y \sin x dy) \\ &= [\cos y dx^2 + x^2 d(\cos y)] + [y^2 d(\sin x) + \sin x dy^2] \\ &= d(x^2 \cdot \cos y) + d(y^2 \cdot \sin x) \\ &= d(x^2 \cos y + y^2 \sin x). \end{aligned}$$

因此可取 $u(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \sin x$.

9. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X = x^2 + y^2, Y = 2xy - 8$, 这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时, 场力所作的功与路径无关.

证 场力所作的功

$$W = \int_L X dx + Y dy = \int_L (x^2 + y^2) dx + (2xy - 8) dy,$$

由于 $P = x^2 + y^2$ 和 $Q = 2xy - 8$ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y =$

$\frac{\partial P}{\partial y}$, 故曲线积分在 xOy 面内与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

10. 判别下列方程中哪些是全微分方程? 对于全微分方程, 求出它的通解.

- (1) $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^2) dy = 0$;
- (2) $(a^2 - 2xy - y^2) dx - (x + y)^2 dy = 0$ (a 为常数);
- (3) $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$;
- (4) $(x \cos y + \cos x) y' - y \sin x + \sin y = 0$;
- (5) $(x^2 - y) dx - x dy = 0$;
- (6) $y(x - 2y) dx - x^2 dy = 0$;
- (7) $(1 + e^{2\theta}) d\rho + 2\rho e^{2\theta} d\theta = 0$;
- (8) $(x^2 + y^2) dx + xy dy = 0$.

说明 ① 在单连通区域内, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 有连续的偏导数, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 是

方程 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 为全微分方程的充要条件. 本题利用这一条件来判别方程是否为全微分方程.

② 在条件 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ 下, 存在函数 $u = u(x, y)$, 满足 $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$,

而 $u(x, y) = C$ 即是方程 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 的通解. 函数 $u(x, y)$ 可用三种方法求得, 其一为曲线积分法, 其二为凑微分法, 其三为偏积分法.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy^2) = 12xy, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y + 4y^2) = 12xy, \end{aligned}$$

因 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0) dx + \int_0^y Q(x, y) dy \\ &= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (6x^2y + 4y^2) dy \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3, \end{aligned}$$

故所求通解为 $x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C$.

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(a^2 - 2xy - y^2) = -2x - 2y, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}[-(x+y)^2] = -2(x+y), \end{aligned}$$

因 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0) dx + \int_0^y Q(x, y) dy \\ &= \int_0^x a^2 dx - \int_0^y (x+y)^2 dy = a^2x - \frac{1}{3}(x+y)^3 + \frac{1}{3}x^3 \\ &= a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3, \end{aligned}$$

故所求通解为

$$a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 = C.$$

(3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial e^y}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y - 2y) = e^y$, 因 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

下面用凑微分法求通解:

$$\begin{aligned} \text{方程的左端} &= (e^y dx + xe^y dy) - 2y dy \\ &= d(xe^y) - d(y^2) = d(xe^y - y^2), \end{aligned}$$

即原方程为

$$d(xe^y - y^2) = 0,$$

故所求通解为

$$xe^y - y^2 = C.$$

(4) 将原方程改写成

$$(\sin y - y \sin x) dx + (x \cos y + \cos x) dy = 0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y - y \sin x) = \cos y - \sin x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y + \cos x) = \cos y - \sin x,$$

因 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} \text{方程的左端} &= (\sin y - y \sin x) dx + (x \cos y + \cos x) dy \\ &= (\sin y dx + x \cos y dy) + (-y \sin x dx + \cos x dy) \\ &= d(x \sin y) + d(y \cos x), \end{aligned}$$

即原方程为

$$d(x \sin y + y \cos x) = 0,$$

故所求通解为

$$x \sin y + y \cos x = C.$$

(5) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1$, 因 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

$$\text{方程的左端} = x^2 dx - (y dx + x dy) = d\left(\frac{x^3}{3}\right) - d(xy),$$

即原方程为

$$d\left(\frac{x^3}{3} - xy\right) = 0,$$

故所求通解为

$$\frac{x^3}{3} - xy = C.$$

(6) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[y(x - 2y)] = x - 4y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2) = -2x$. 因 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程不是全微分方程.

(7) $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(1 + e^{2\theta}) = 2e^{2\theta}$, $\frac{\partial Q}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho e^{2\theta}) = 2e^{2\theta}$, 因 $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial \rho}$, 故原方程是全微分方程.

$$\text{方程的左端} = d\rho + (e^{2\theta} d\rho + 2\rho e^{2\theta} d\theta) = d\rho + d(\rho e^{2\theta}),$$

即原方程为

$$d(\rho + \rho e^{2\theta}) = 0,$$

故所求通解为

$$\rho + \rho e^{2\theta} = C.$$

(8) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$. 因 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程不是全微分方程.

11. 确定常数 λ , 使在右半平面 $x > 0$ 内的向量 $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda i - x^2(x^4 + y^2)^\lambda j$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

解 在单连通区域 G 内, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 则向量 $A(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度 (此条件相当于 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是 $u(x, y)$ 的全微分) 的充分必要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立.

本题中, $P(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, Q(x, y) = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 2\lambda xy(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - x^2\lambda(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 4x^3.$$

由等式 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 得到

$$4x(x^4 + y^2)^\lambda(1 + \lambda) = 0,$$

由于 $4x(x^4 + y^2)^\lambda > 0$, 故 $\lambda = -1$, 即 $A(x, y) = \frac{2xyi - x^2j}{x^4 + y^2}$.

在半平面 $x > 0$ 内, 取 $(x_0, y_0) = (1, 0)$, 则得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0^2} dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

习题 11-4

对面积的曲面积分

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ , 在点 (x, y, z) 处它的面密度为 $\mu(x, y, z)$, 用对面积的曲面积分表示这曲面对 x 轴的转动惯量.

解 设想将 Σ 分成 n 小块, 取出其中任意一块记作 dS (其面积也记作 dS), (x, y, z) 为 dS 上一点, 则 dS 对 x 轴的转动惯量近似等于

$$dI_x = (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

以此作为转动惯量元素并积分, 即得 Σ 对 x 轴的转动惯量为

$$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证 由于 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上可积, 故不论把 Σ 如何分割, 积分和的极限总是不变的. 因此在分割 Σ 时, 可以使 Σ_1 和 Σ_2 的公共边界曲线永远作为一条分割线. 这样, $f(x, y, z)$ 在 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ 上的积分和等于 Σ_1 上的积分和加上 Σ_2 上的积分和, 记为

$$\sum_{(\Sigma_1 + \Sigma_2)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \sum_{(\Sigma_1)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i + \sum_{(\Sigma_2)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

令 $\lambda = \max \{ \Delta S_i \text{ 的直径} \} \rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 与二重积分有什么关系?

解 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时, Σ 的方程为 $z = 0$, 因此在 Σ 上取值的 $f(x, y, z)$ 恒为 $f(x, y, 0)$, 且 $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = dxdy$. 又 Σ 在 xOy 面上的投影区域即为 Σ 自身, 因此有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(x, y, 0) dxdy.$$

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 其中 Σ 为抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分, $f(x, y, z)$ 分别如下:

$$(1) f(x, y, z) = 1; \quad (2) f(x, y, z) = x^2 + y^2;$$

$$(3) f(x, y, z) = 3z.$$

解 抛物面 Σ 与 xOy 面的交线为 $x^2 + y^2 = 2$, 故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$. 又

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy.$$

于是,

$$(1) \iint_{\Sigma} 1 \cdot dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \\ & = 2\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{26}{6}\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \\
 &\stackrel{\rho = \frac{1}{2} \tan t}{=} 2\pi \cdot \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t dt \\
 &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t (\sec^2 t - 1) d(\sec t) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{596}{15} = \frac{149}{30} \pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \iint_{\Sigma} 3z dS &= 3 \iint_{D_{xy}} [2 - (x^2 + y^2)] \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} 3 \iint_{D_{xy}} (2 - \rho^2) \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2) \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \\
 &\stackrel{\rho = \frac{1}{2} \tan t}{=} 6\pi \left(\frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan t dt - \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t dt \right) \\
 &= 6\pi \left[\frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t d(\sec t) - \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t (\sec^2 t - 1) d(\sec t) \right] \\
 &= 6\pi \left(\frac{13}{3} - \frac{149}{60} \right) = \frac{111}{10} \pi.
 \end{aligned}$$

5. 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是:

(1) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

(2) 锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所截得的部分.

解 (1) Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成, 其中 Σ_1 为平面 $z = 1$ 上被圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 所围的部分; Σ_2 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$).

在 Σ_1 上, $dS = dx dy$;

在 Σ_2 上, $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$.

Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 均为 $x^2 + y^2 \leq 1$.

因此

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho + \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \\
 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.
 \end{aligned}$$

(2) 由题设, Σ 的方程为 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$,

$$\begin{aligned}
 dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \sqrt{1 + \frac{9x^2}{3(x^2 + y^2)} + \frac{9y^2}{3(x^2 + y^2)}} dx dy = 2 dx dy.
 \end{aligned}$$

又由 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 和 $z = 3$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 3$, 故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leq 3$. 于是

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot 2 dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 9\pi.$$

6. 计算下列对面积的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分;

(2) $\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS$, 其中 Σ 为平面 $2x + 2y + z = 6$ 在第一卦限中的部分;

(3) $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上 $z \geq h$ ($0 < h < a$) 的部分;

(4) $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分.

解 (1) 在 Σ 上, $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、 y 轴和直线 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} \left[\left(4 - 2x - \frac{4}{3}y \right) + 2x + \frac{4}{3}y \right] \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3} \right)^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot (D_{xy} \text{ 的面积}) \\
 &= \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \right) = 4\sqrt{61}.
 \end{aligned}$$

(2) 在 Σ 上, $z = 6 - 2x - 2y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域为由 x 轴、 y 轴和直线 $x + y = 3$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} [2xy - 2x^2 - x + (6 - 2x - 2y)] \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2} dx dy \\
 &= 3 \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (6 - 3x - 2x^2 + 2xy - 2y) dy \\
 &= 3 \int_0^3 [(6 - 3x - 2x^2)(3 - x) + x(3 - x)^2 - (3 - x)^2] dx \\
 &= 3 \int_0^3 (3x^3 - 10x^2 + 9) dx = -\frac{27}{4}.
 \end{aligned}$$

(3) 在 Σ 上, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2\}$.

由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称, 故有

$$\iint_{\Sigma} x dS = 0, \quad \iint_{\Sigma} y dS = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{\Sigma} z dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= a \iint_{D_{xy}} dx dy = a\pi(a^2 - h^2).
 \end{aligned}$$

(4) Σ 如图 11-9 所示, Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax$. 由于 Σ 关于 zOx 面对称, 而函数 xy 和 yz 关于 y 均为奇函数, 故

$$\iint_{\Sigma} xy dS = 0, \quad \iint_{\Sigma} yz dS = 0.$$

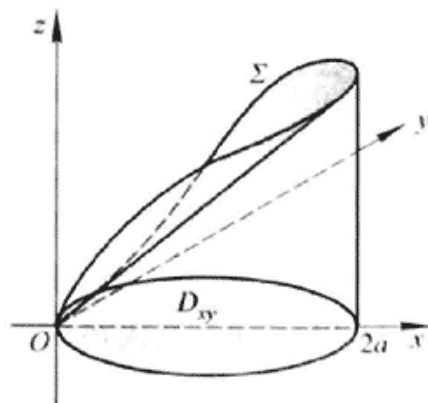


图 11-9

于是

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS &= \iint_{\Sigma} zxdS \\
 &= \iint_{D_x} x \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \\
 &= \sqrt{2} \iint_{D_x} x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \cos \theta \cdot \rho \cdot \rho d\rho \\
 &= 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta \\
 &= 8\sqrt{2}a^4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.
 \end{aligned}$$

7. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 此壳的面密度为 $\mu = z$.

解 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

$z_x = x, z_y = y$. 故 $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$. 因此

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_x} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_x} \rho^2 \sqrt{1 + \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho \\
 &\stackrel{t = \rho^2}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^2 t \sqrt{1 + t} dt \\
 &\stackrel{\text{分部积分法}}{=} \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{3} t(1 + t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 - \frac{2}{3} \int_0^2 (1 + t)^{\frac{3}{2}} dt \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{4}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (3^{\frac{5}{2}} - 1) \right] = \frac{2\pi}{15} (6\sqrt{3} + 1).
 \end{aligned}$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 对于 z 轴的转动惯量.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } I_z &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mu_0 dS \\
 &= \mu_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= \mu_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\text{极坐标}} \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \\
 & \xrightarrow{\rho = a \sin t} 2\pi a \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3 \sin^3 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt \\
 & = 2\pi a^4 \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 2\pi a^4 \mu_0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \pi a^4 \mu_0.
 \end{aligned}$$

习题 11-5

对坐标的曲面积分

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dydz = \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dydz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dydz.$$

证 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i (其面积也记为 ΔS_i), ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$, 在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) . 设 λ 是各小块曲面的直径的最大值, 则

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dydz \\
 & = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \pm P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] (\Delta S_i)_{yz} \\
 & = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \\
 & = \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dydz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dydz.
 \end{aligned}$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ 与二重积分有什么关系?

解 此时 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 就是 Σ 自身(但不定侧), 且在 Σ 上, $z = 0$, 因此

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, 0) dx dy.$$

当 Σ 取上侧时为正号, 取下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半部分的下侧;

(2) $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx$, 其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所

截得的在第一卦限内的部分的前侧;

(3) $\iint_{\Sigma} [f(x,y,z) + x] dydz + [2f(x,y,z) + y] dzdx + [f(x,y,z) + z] dxdy$, 其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧;

(4) $\oint_{\Sigma} xz dxdy + xy dydz + yz dzdx$, 其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 (1) Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 在 Σ 上, $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 因 Σ 取下侧, 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dxdy &= - \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dxdy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_{D_{xy}} \rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta \cdot \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho \\ &\stackrel{\rho = R \sin t}{=} \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5 \sin^5 t \cdot R \cos t \cdot R \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{4} R^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 t - \sin^7 t) dt \\ &= \frac{\pi}{4} R^7 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{105} \pi R^7. \end{aligned}$$

(2) 由于柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 在 xOy 面上的投影为零, 因此 $\iint_{\Sigma} z dxdy = 0$. 又, $D_{yz} = \{(y,z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$, $D_{zx} = \{(x,z) | 0 \leq z \leq 3, 0 \leq x \leq 1\}$ (图 11-10), 因 Σ 取前侧, 所以

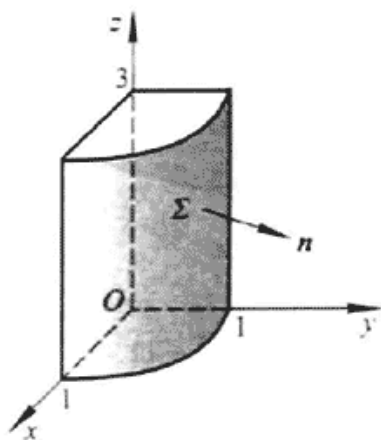


图 11-10

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} x dydz + \iint_{\Sigma} y dzdx$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2} dy dz + \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} dz dx \\
 &= \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy + \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= 2 \cdot 3 \left[\frac{y}{2} \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y \right]_0^1 \\
 &= \frac{3}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

(3) 在 Σ 上, $z = 1 - x + y$. 由于 Σ 取上侧, 故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

由两类曲面积分之间的联系, 可得

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{\Sigma} [(f+x) \cos \alpha + (2f+y) \cos \beta + (f+z) \cos \gamma] dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} [(f+x) - (2f+y) + (f+z)] dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x-y+z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Sigma \text{ 的面积}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(4) 在坐标面 $x=0$, $y=0$ 和 $z=0$ 上, 积分值均为零, 因此只需计算在 Σ' : $x+y+z=1$ (取上侧) 上的积分值 (图 11-11). 下面用两种方法计算.

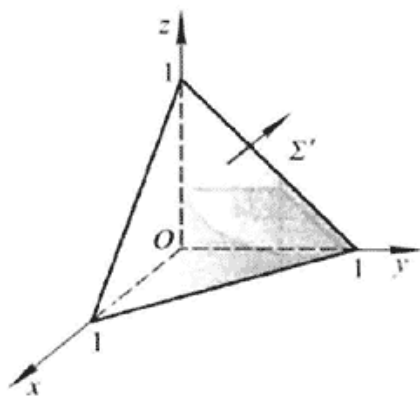


图 11-11

$$\begin{aligned}
 \text{解法一} \quad \iint_{\Sigma'} xz dx dy &= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y) dx dy \\
 &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{1}{24},
 \end{aligned}$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性, 可得

$$\iint_{\Sigma} xydydz = \iint_{\Sigma} yzdzdx = \iint_{\Sigma} xzdx dy = \frac{1}{24},$$

因此
$$\oiint_{\Sigma} xzdx dy + xydydz + yzdzdx = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

解法二 利用两类曲面积分的联系, 将 $\iint_{\Sigma} xydydz$ 和 $\iint_{\Sigma} yzdzdx$ 均化为关于坐标 x 和 y 的曲面积分计算.

由于 $\Sigma': x + y + z = 1$ 取上侧, 故 Σ' 在任一点处的单位法向量

$$\boldsymbol{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

于是
$$\iint_{\Sigma} xydydz = \iint_{\Sigma} xy \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} xy \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy = \iint_{\Sigma} xy dx dy,$$

$$\iint_{\Sigma} yzdzdx = \iint_{\Sigma} yz \cos \beta dS = \iint_{\Sigma} yz \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dx dy = \iint_{\Sigma} yz dx dy.$$

因此
$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xzdx dy + xydydz + yzdzdx \\ &= \iint_{\Sigma} (xz + xy + yz) dx dy \\ &= \iint_{\Delta_1} [x(1-x-y) + xy + y(1-x-y)] dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-x^2 - y^2 - xy + x + y) dy = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

于是原式 $= \frac{1}{8}$.

注 计算本题最方便的方法是利用下节的高斯公式:

$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma} xzdx dy + xydydz + yzdzdx \\ &= \iiint_{\Omega} (y + z + x) dv \stackrel{\text{对称性}}{=} 3 \iiint_{\Omega} z dv = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz \\ &= 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \\ &= 3 \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dx dy$$

化成对面积的曲面积分, 其中:

(1) Σ 是平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限的部分的上侧;

(2) Σ 是抛物面 $z = 8 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (1) 由于 $\Sigma: 3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 取上侧, 故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\begin{aligned} n &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (2\sqrt{3})^2}}(3, 2, 2\sqrt{3}) \\ &= \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R\right) dS. \end{aligned}$$

(2) 由于 $\Sigma: z = 8 - (x^2 + y^2)$ 取上侧, 故 Σ 在其上任一点 (x, y, z) 处的单位法向量为

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}}(2x, 2y, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS. \end{aligned}$$

习题 11-6

高斯公式 * 通量与散度

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\oint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$ 所围成的立体的表面的外侧;

* (2) $\oint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧;

* (3) $\oint_{\Sigma} xz^2 dy dz + (x^2y - z^3) dz dx + (2xy + y^2z) dx dy$, 其中 Σ 为上半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2$ 的表面的外侧;

(4) $\oint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 是界于 $z = 0$ 和 $z = 3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 9$ 的整个表面的外侧;

(5) $\oint_{\Sigma} 4xzdydz - y^2dzdx + yzdx dy$, 其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

$$\begin{aligned}\text{解 (1) 原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dv \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} 6 \iiint_{\Omega} z dv = 6 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z dz \\ &= 6 \cdot a \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = 3a^4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ 原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv \\ &\stackrel{\text{球面坐标}}{=} 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \text{ 原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2) dv \\ &\stackrel{\text{球面坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{2}{5}\pi a^5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \text{ 原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dv = 3 \iiint_{\Omega} dv \\ &= 3 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 81\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \text{ 原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= \iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dv \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (4z - y) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 (2 - y) dy = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

注 在计算上面的积分 $\iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dv$ 时,如果利用被积函数和积分区域关于积分变量的对称性,可知 $\iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} y dv$, 于是

$$\iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dv = \iiint_{\Omega} 3z dv = 3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z dz = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

从而可简化运算.

 * 2. 求下列向量 A 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量:

(1) $A = yzi + xzj + xyk$, Σ 为圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的全表面,流向外侧;

(2) $A = (2x - z)i + x^2yj - xz^2k$, Σ 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的全表面,流向外侧;

(3) $A = (2x + 3z)i - (xz + y)j + (y^2 + 2z)k$, Σ 是以点 $(3, -1, 2)$ 为球心,半径 $R = 3$ 的球面,流向外侧.

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 通量 } \Phi &= \iint_{\Sigma} A \cdot dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} A dv = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right] dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 通量 } \Phi &= \iint_{\Sigma} A \cdot dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} A dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial(2x - z)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(-xz^2)}{\partial z} \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} (2 + x^2 - 2xz) dv \\ &= 2a^3 + \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 - 2xz) dz \\ &= 2a^3 - \frac{a^5}{6} = a^3 \left(2 - \frac{a^2}{6} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) 通量 } \Phi &= \iint_{\Sigma} A \cdot dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} A dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial(2x + 3z)}{\partial x} + \frac{\partial(-xz - y)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2 + 2z)}{\partial z} \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} (2 - 1 + 2) dv = 3 \iiint_{\Omega} dv \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 108\pi. \end{aligned}$$

 * 3. 求下列向量场 A 的散度:

(1) $A = (x^2 + yz)i + (y^2 + xz)j + (z^2 + xy)k$;

$$(2) \mathbf{A} = e^{xy}\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} + \cos(xz^2)\mathbf{k};$$

$$(3) \mathbf{A} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}.$$

解 (1) $P = x^2 + yz, Q = y^2 + xz, R = z^2 + xy,$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

$$(2) P = e^{xy}, Q = \cos(xy), R = \cos(xz^2),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ye^{xy} - x\sin(xy) - 2xz\sin(xz^2).$$

$$(3) P = y^2, Q = xy, R = xz,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + x + x = 2x.$$

4. 设 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明:

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \oint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. 这个公式叫做格林第二公式.

证 由教材本节例 3 证明的格林第一公式知:

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v dx dy dz = \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置, 得

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u dx dy dz = \oint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \oint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

5. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力 (即浮力) 的方向铅直向上, 其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证 取液面为 xOy 面, z 轴铅直向上. 设液体的密度为 ρ . 在物体表面 Σ 上取面积元素 $dS, M(x, y, z)$ 为 dS 上的一点 ($z \leq 0$), Σ 在点 M 处的外法线向量的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则 dS 所受液体的压力指向内法线方向 $(-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma)$, 压力在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分量分别为

$$\rho z \cos \alpha dS, \quad \rho z \cos \beta dS, \quad \rho z \cos \gamma dS.$$

Σ 所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在 Σ 上的积分. 由高斯公式可算得

$$F_x = \oint_{\Sigma} \rho z \cos \alpha dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial x} dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0,$$

$$F_y = \oint_{\Sigma} \rho z \cos \beta dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial y} dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0,$$

$$F_z = \oint_{\Sigma} \rho z \cos \gamma dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial z} dv = \iiint_{\Omega} \rho dv = \rho V$$

(V 为 Ω 的体积), 故合力

$$F = \rho V k,$$

此力的方向铅直向上, 大小等于被物体排开的液体的重力.

习题 11-7

斯托克斯公式 * 环流量与旋度

1. 试对曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$ 验证斯托克斯公式.

解 按右手法则, Σ 取上侧, Σ 的边界 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 1$, 从 z 轴正向看去, 取逆时针方向.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} &= \iint_{\Sigma} (1 - 2y) dxdy = \iint_{\Omega} (1 - 2y) dxdy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - 2\rho \sin \theta) \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3} \rho^3 \sin \theta \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Γ 的参数方程可取为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 1, t$ 从 0 变到 2π , 故

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t) dt = \pi,$$

两者相等, 斯托克斯公式得到验证.

* 2. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$, 若从 x 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, 其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$, 若从 x 轴正向看去, 这椭圆是取逆时针方向;

(3) $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$, 其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$, 若从 z 轴正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(4) $\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz$, 其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0$, 若从 z 轴正方向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 (1) 取 Σ 为平面 $x + y + z = 0$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, 则 Σ 的面积为 πa^2 , Σ 的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ (图 11-12).}$$

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dS = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS \\ &= -\sqrt{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

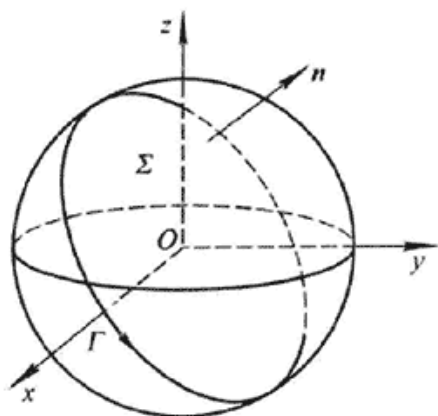


图 11-12

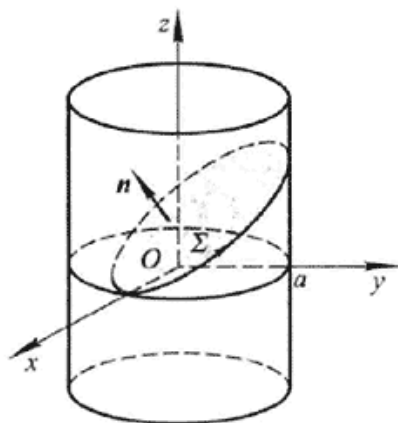


图 11-13

(2) 如图 11-13, 取 Σ 为平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, Σ 的单位法

向量 $\boldsymbol{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$. 由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} &\oint_{\Gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz \\ &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} dS \end{aligned}$$

$$= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} dS. \quad (*)$$

现用两种方法来求 $\iint_{\Sigma} dS$.

解法一 由于 $\iint_{\Sigma} dS = \Sigma$ 的面积 A , 而 $A \cdot \cos \gamma = A \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域的面积 $= \pi a^2$, 故

$$\iint_{\Sigma} dS = \pi a^2 / \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi a \sqrt{a^2+b^2}.$$

解法二 用曲面积分计算法.

由于在 Σ 上, $z = b - \frac{b}{a}x$,

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} dx dy, \end{aligned}$$

又 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} dS &= \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} dx dy = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot \pi a^2 \\ &= \pi a \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

将所求得的 $\iint_{\Sigma} dS$ 代入 (*) 式, 得

$$\text{原式} = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \pi a \sqrt{a^2+b^2} = -2\pi a(a+b).$$

(3) 取 Σ 为平面 $z=2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, 则 Σ 的单位法向量为 $n=(0,0,1)$, Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2 \leq 4$. 于是由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} 3y dx - xz dy + yz^2 dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} dS \\ &= - \iint_{\Sigma} (z+3) dS = - \iint_{D_{xy}} (2+3) dx dy = -5 \cdot \pi \cdot 2^2 \\ &= -20\pi. \end{aligned}$$

(4) Γ 即为 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=9$, 取 Σ 为圆域 $x^2+y^2 \leq 9$ 的上侧, 则由

斯托克斯公式

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_{\Sigma} dxdy = \iint_{D_{xy}} dxdy = 9\pi. \end{aligned}$$

* 3. 求下列向量场 A 的旋度:

$$(1) A = (2z - 3y)i + (3x - z)j + (y - 2x)k;$$

$$(2) A = (z + \sin y)i - (z - x\cos y)j;$$

$$(3) A = x^2 \sin y i + y^2 \sin(xz)j + x y \sin(\cos z)k.$$

$$\text{解 } (1) \operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z - 3y & 3x - z & y - 2x \end{vmatrix} = 2i + 4j + 6k.$$

$$\begin{aligned} (2) \operatorname{rot} A &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z + \sin y & -(z - x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = i + j + (\cos y - \cos y)k \\ &= i + j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \operatorname{rot} A &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 \sin y & y^2 \sin(xz) & x y \sin(\cos z) \end{vmatrix} \\ &= [x \sin(\cos z) - x y^2 \cos(xz)]i - y \sin(\cos z)j \\ &\quad + [y^2 z \cos(xz) - x^2 \cos y]k. \end{aligned}$$

* 4. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} A \cdot n dS$ 化为曲线积分, 并计算积分值, 其中 A, Σ 及 n 分别如下:

(1) $A = y^2 i + xyj + xzk$, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧, n 是 Σ 的单位法向量;

(2) $A = (y - z)i + yzj - xzk$, Σ 为立方体 $\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面, n 是 Σ 的单位法向量.

解 (1) Σ 的正向边界曲线 Γ 为 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 从 z 轴正向看去 Γ 取逆时针向, Γ 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t$ 从 0 变到 2π .

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\
 &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz \\
 &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \sin t \cdot \cos t] dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos^2 t) d(\cos t) = 0.
 \end{aligned}$$

(2) Σ 的边界曲线 Γ 为 xOy 面上由直线 $x=0, y=0, x=2, y=2$ 所围成的正方形的边界, 从 z 轴正向看去取逆时针向. 由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\
 &= \oint_{\Gamma} (y-z) dx + yz dy - xz dz \quad (\text{代入 } z=0) \\
 &= \oint_{\Gamma} y dx = \int_2^0 2 dx = -4.
 \end{aligned}$$

 * 5. 求下列向量场 $\mathbf{A}$ 沿闭曲线 Γ (从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向) 的环流量:

(1) $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (c 为常量), Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$;

(2) $\mathbf{A} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$, 其中 Γ 为圆周 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

解 (1) Γ 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t$ 从 0 变到 2π , 于是所求环流量为

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\
 &= \oint_{\Gamma} (-y) dx + x dy + c dz \\
 &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t] dt \\
 &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
 \end{aligned}$$

(2) Γ 是 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = 4$ (从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向), 它的参数方程为 $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0, t$ 从 0 变到 2π . 于是所求的环流量为

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\
 &= \oint_{\Gamma} (x-z) dx + (x^3 + yz) dy - 3xy^2 dz \quad (\text{代入 } z=0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_r x dx + x^3 dy \\
&= \int_0^{2\pi} [2 \cos t \cdot (-2 \sin t) + 8 \cos^3 t \cdot 2 \cos t] dt \\
&= -4 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + 16 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \\
&= 0 + 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \text{ ①} \\
&= 64 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 12\pi.
\end{aligned}$$

注① $\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \xrightarrow{\text{周期性}} 2 \int_0^{\pi} \cos^4 t dt = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t dt \right],$

由于 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t dt \xrightarrow{u = \pi - t} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^4 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du$, 故得

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt.$$

 * 6. 证明 $\text{rot}(a+b) = \text{rot } a + \text{rot } b$.

证 设 $a = a_x i + a_y j + a_z k, b = b_x i + b_y j + b_z k$, 其中 $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ 均为 x, y, z 的函数, 则

$$\begin{aligned}
\text{rot}(a+b) &= \text{rot}((a_x + b_x)i + (a_y + b_y)j + (a_z + b_z)k) \\
&= \left[\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial z} \right] i + \left[\frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial x} \right] j \\
&\quad + \left[\frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial y} \right] k \\
&= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) k \right] \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) k \right] \\
&= \text{rot } a + \text{rot } b.
\end{aligned}$$

 * 7. 设 $u = u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\text{rot}(\text{grad } u)$.

解

$$\begin{aligned}
\text{grad } u &= \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k, \\
\text{rot}(\text{grad } u) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) i + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) j
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) k \quad (\text{由于各二阶偏导数连续}) \\ = 0i + 0j + 0k = 0.$$

总习题十一

1. 填空:

(1) 第二类曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化成第一类曲线积分是_____, 其中 α, β, γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x, y, z) 处的_____的方向角;

(2) 第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy$ 化成第一类曲面积分是_____, 其中 α, β 与 γ 为有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的_____的方向角.

解 (1) 由教材本章第二节的公式(2-3), 可知第一个空格应填: $\int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$; 第二个空格应填: 切向量.

(2) 由教材本章第五节的公式(5-9), 可知第一个空格应填: $\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$; 第二个空格应填: 法向量.

2. 下题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

设曲面 Σ 是上半球面: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$, 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分, 则有().

(A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

解 应选(C). 先说明(A)不对. 由于 Σ 关于 yOz 面对称, 被积函数 x 关于 x 是奇函数, 所以 $\iint_{\Sigma} x dS = 0$. 但在 Σ_1 上, 被积函数 x 连续且大于零, 所以 $\iint_{\Sigma_1} x dS > 0$. 因此 $\iint_{\Sigma} x dS \neq 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$. 类似可说明(B)和(D)不对. 再说明(C)正确. 由于 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称, 被积函数 z 关于 x 和 y 均为偶函数, 故 $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$; 而在 Σ_1 上, 字母 x, y, z 是对称的. 故 $\iint_{\Sigma_1} z dS = \iint_{\Sigma_1} x dS$, 因此有 $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$.

3. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

(2) $\int_{\Gamma} z ds$, 其中 Γ 为曲线 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t (0 \leq t \leq t_0)$;

(3) $\int_L (2a - y) dx + x dy$, 其中 L 为摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

(4) $\int_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, 其中 Γ 是曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上由 $t_1 = 0$ 到 $t_2 = 1$ 的一段弧;

(5) $\int_L (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy$, 其中 L 为上半圆周 $(x - a)^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$, 沿逆时针方向;

(6) $\oint_{\Gamma} xyz dz$, 其中 Γ 是用平面 $y = z$ 截球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所得的截痕, 从 z 轴的正向看去, 沿逆时针方向.

解 (1) 解法一 L 的方程即为 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, 故可取 L 的参数方程为

$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. 于是

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}a}{2} \sqrt{1 + \cos t} \cdot \sqrt{\left(-\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}a^2}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt = \frac{\sqrt{2}a^2}{4} \cdot \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 2a^2. \end{aligned}$$

解法二 L 的极坐标方程为 $\rho = a \cos \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$,

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = a d\theta,$$

因此 $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot a d\theta = 2a^2$.

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{\Gamma} z ds &= \int_0^{t_0} t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \sqrt{2 + t^2} d(2 + t^2) \\ &= \frac{1}{3} (2 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3} \left[(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} \right]. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_L (2a - y) dx + x dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} [(2a - a + a \cos t) \cdot a(1 - \cos t) + a(t - \sin t) \cdot a \sin t] dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 [-t \cos t]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt \\
 &= -2\pi a^2 + 0 = -2\pi a^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \int_r (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz \\
 &= \int_0^1 [(t^4 - t^6) \cdot 1 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt \\
 &= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \frac{1}{35}.
 \end{aligned}$$

(5) 如图 11-14, 添加有向线段 $OA: y=0, x$ 从 0 变到 $2a$, 则在由 L 与 OA 所围成的闭区域 D 上应用格林公式可得

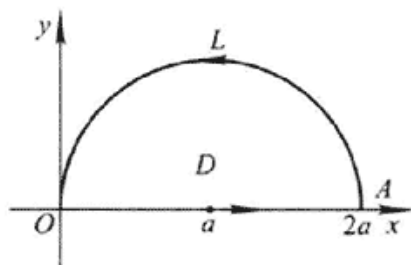


图 11-14

$$\begin{aligned}
 & \int_{L+OA} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\
 &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2) dx dy \\
 &= 2 \iint_D dx dy = \pi a^2,
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 & \int_L (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\
 &= \pi a^2 - \int_{OA} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\
 &= \pi a^2 - \int_0^{2a} (e^x \sin 0 - 2 \cdot 0) dx = \pi a^2.
 \end{aligned}$$

注 本题通过添加辅助路径并利用格林公式, 将难以直接计算的曲线积分化为一个易于计算的二重积分和另一个易于计算的曲线积分之差, 从而方便地求得结果. 这是格林公式的用处之一, 值得注意.

(6) 由 Γ 的一般方程 $\begin{cases} y = z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ 可得 $x^2 + 2y^2 = 1$. 从而可令 $x = \cos t$,

$y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, z = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, t$ 从 0 变到 2π . 于是

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} xyz dz &= \int_0^{2\pi} \cos t \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{2}} dt \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\&= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \\&= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.\end{aligned}$$

例 4. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是界于平面 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的圆柱面 $x^2 + y^2 =$

R^2 ;

(2) $\iint_{\Sigma} (y^2 - z) dydz + (z^2 - x) dzdx + (x^2 - y) dxdy$, 其中 Σ 为锥面 $z =$

$\sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq h)$ 的外侧;

(3) $\iint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;

(4) $\iint_{\Sigma} xyz dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 的外侧.

解 (1) 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片, Σ_1 为 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, Σ_2 为 $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, Σ_1 和 Σ_2 在 zOx 面上的投影区域均为

$$D_{zx} = \{(x, z) \mid 0 \leq z \leq H, -R \leq x \leq R\}.$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{D_{zx}} \frac{1}{R^2 + z^2} \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{R^2 - x^2}} dxdz \\&= \int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2} dz \cdot \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\&= \left[\frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \right]_0^H \cdot \left[R \arcsin \frac{x}{R} \right]_{-R}^R \\&= \pi \arctan \frac{H}{R}.\end{aligned}$$

又由于被积函数关于 y 是偶函数, 积分曲面 Σ_1 和 Σ_2 关于 zOx 面对称, 故

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \pi \arctan \frac{H}{R}.$$

由此得

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = 2\pi \arctan \frac{H}{R}.$$

(2) 添加辅助曲面 $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid z = h, x^2 + y^2 \leq h^2\}$, 取上侧, 则在由 Σ 和 Σ_1 所包围的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} (y^2 - z) dydz + (z^2 - x) dzdx + (x^2 - y) dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial(y^2 - z)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2 - x)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 - y)}{\partial z} \right] dv = \iiint_{\Omega} 0 \cdot dv = 0, \end{aligned}$$

于是 原式 = $-\iint_{\Sigma_1} (y^2 - z) dydz + (z^2 - x) dzdx + (x^2 - y) dxdy$

$$= -\iint_{\Sigma_1} (x^2 - y) dxdy = -\iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dxdy,$$

其中 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq h^2\}.$

在计算 $\iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dxdy$ 时, 由对称性易知 $\iint_{D_{xy}} y dxdy = 0$, 又 $\iint_{D_{xy}} x^2 dxdy = \iint_{D_{xy}} y^2 dxdy$, 故

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dxdy &= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{4} h^4. \end{aligned}$$

从而得 原式 = $-\frac{\pi}{4} h^4.$

注 本题若用第二类曲面积分的计算公式直接计算, 则运算将十分繁复. 现在通过添加辅助曲面并利用高斯公式, 就将原积分化为辅助曲面上的一个容易计算的曲面积分, 从而达到了化繁为简、化难为易的目的. 这种做法与前面第 3(5) 题利用格林公式化简曲线积分计算的做法是类似的, 请读者注意比较, 并思考这样的问题: 要使这种做法可行, 所给的曲线积分(曲面积分)应具备什么条件?

(3) 添加辅助曲面 $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 取下侧, 则在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} x dydz + y dzdx + z dxdy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv \\ &= 3 \iiint_{\Omega} dv = 3 \cdot \frac{2\pi R^3}{3} = 2\pi R^3, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2\pi R^3 - \iint_{\Sigma_1} x dydz + y dzdx + z dxdy \\ &= 2\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3. \end{aligned}$$

(4) 解法一 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片, 其中 $\Sigma_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} (x \geq 0, y \geq 0)$,

取上侧; $\Sigma_2: z = -\sqrt{1-x^2-y^2} (x \geq 0, y \geq 0)$, 取下侧. Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域均为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (图 11-15). 于是

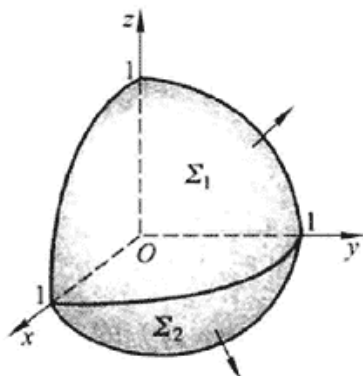


图 11-15

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho \\
 &\stackrel{\rho = \sin t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos^2 t dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{15},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy &= - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{15},
 \end{aligned}$$

因而

$$\iint_{\Sigma} xyz dx dy = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}.$$

解法二 应用高斯公式计算.

添加辅助曲面 $\Sigma_3: x = 0$ (取后侧); $\Sigma_4: y = 0$ (取左侧), 则有

$$\iint_{\Sigma_3} xyz dx dy = \iint_{\Sigma_4} xyz dx dy = 0.$$

在由 Σ, Σ_3 和 Σ_4 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式, 得

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} xyz dx dy &= \iint_{\Sigma + \Sigma_3 + \Sigma_4} xyz dx dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(xyz)}{\partial z} dv \\
 &= \iiint_{\Omega} xy dv = \iint_{D_{xy}} xy dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \\
 &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \frac{2}{15}.
 \end{aligned}$$

5. 证明: $\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分, 并求出一个这样的二元函数.

证 G 为平面单连通区域, 在 G 内 $P = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故 $\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$ 在 G 内是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取折线积分路径 $(0, 1) \rightarrow (x, 1) \rightarrow (x, y) \rightarrow (0, y)$ (图 11-16), 则

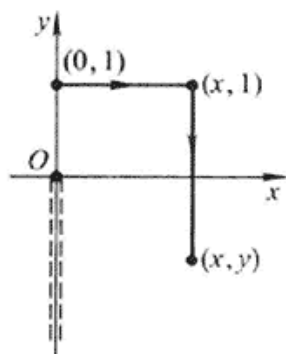


图 11-16

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x \frac{x\mathrm{d}x}{x^2 + 1} + \int_1^y \frac{y\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} [\ln(x^2 + y^2)]_1^y \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

6. 设在半平面 $x > 0$ 内有力 $F = -\frac{k}{\rho^3}(xi + yj)$ 构成力场, 其中 k 为常数, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

证 半平面 $x > 0$ 是单连通区域. 在此区域内, $P = -\frac{kx}{\rho^3}$, $Q = -\frac{ky}{\rho^3}$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3kxy}{\rho^5} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故在此区域内, 场力 F 沿曲线 L 所作的功, 即

$$\int_L F \cdot \mathrm{d}r = -k \int_L \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\rho^3}$$

与路径无关.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

(1) 证 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] \right\} &= f(xy) - \frac{1}{y^2} + xy f'(xy) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \right\} \end{aligned}$$

在上半平面这个单连通区域内处处成立, 所以在上半平面内曲线积分与路径 L 无关.

(2) 解 由于 I 与路径无关, 故可取积分路径 L 为由点 (a, b) 到点 (c, b) 再到点 (c, d) 的有向折线, 从而得

$$\begin{aligned} I &= \int_a^c \frac{1}{b} [1 + b^2 f(bx)] dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} [y^2 f(cy) - 1] dy \\ &= \frac{c-a}{b} + \int_a^c b f(bx) dx + \int_b^d c f(cy) dy + \frac{c}{d} - \frac{c}{b} \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t) dt + \int_{bc}^{cd} f(t) dt \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t) dt, \end{aligned}$$

当 $ab = cd$ 时, $\int_{ab}^{cd} f(t) dt = 0$, 由此得

$$I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

8. 求均匀曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的质心的坐标.

解 设质心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. 由对称性可知质心位于 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$. 由于

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= a \iint_{D_{xy}} dx dy = a \cdot \pi a^2 = \pi a^3, \end{aligned}$$

又

Σ 的面积 $A = 2\pi a^2$,

故

$$\bar{z} = \frac{\iint_D z dS}{A} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2},$$

所求的质心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

9. 设 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

$$(1) \iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D (\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v) dx dy + \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

$$(2) \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u 与 v 沿 L 的外法线向量 $\mathbf{n}$ 的方向导数, 符号 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称二维拉普拉斯算子.

证 (1) 如图 11-17, $\mathbf{n}$ 为有向曲线 L 的外法线向量, $\boldsymbol{\tau}$ 为 L 的切线向量. 设 x 轴到 $\mathbf{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的转角分别为 φ 和 α , 则 $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$, 且 $\mathbf{n}$ 的方向余弦为 $\cos \varphi, \sin \varphi$; $\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos \alpha, \sin \alpha$. 于是

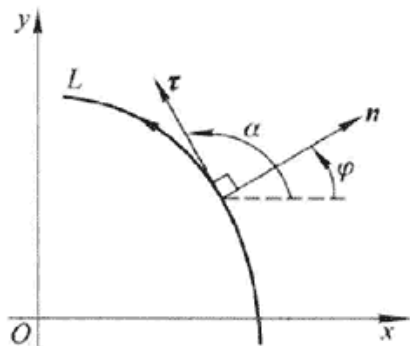


图 11-17

$$\begin{aligned} \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_L v (u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi) ds \\ &= \oint_L v (u_x \sin \alpha - u_y \cos \alpha) ds \quad (\cos \alpha ds = dx, \sin \alpha ds = dy) \\ &= \oint_L v u_x dy - v u_y dx \\ &\stackrel{\text{格林公式}}{=} \iint_D \left[\frac{\partial (v u_x)}{\partial x} - \frac{\partial (-v u_y)}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D [(u_x v_x + v u_{xx}) + (u_y v_y + v u_{yy})] dx dy \\
&= \iint_D v(u_{xx} + u_{yy}) dx dy + \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) dx dy \\
&= \iint_D v \Delta u dx dy + \iint_D (\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v) dx dy,
\end{aligned}$$

把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1)证得的等式中交换 u, v 的位置, 可得

$$\iint_D u \Delta v dx dy = - \iint_D (\mathbf{grad} v \cdot \mathbf{grad} u) dx dy + \oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} ds,$$

在此式的两端分别减去(1)中等式的两端, 即得所需证明的等式.

 * 10. 求向量 $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

$$\begin{aligned}
\text{解 通量 } \Phi &= \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\
&\stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv \\
&= \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dv = 3 \iiint_{\Omega} dv = 3 \cdot 1 = 3.
\end{aligned}$$

 11. 求力 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功, 其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去, 沿顺时针方向.

$$\text{解 } W = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz.$$

下面用两种方法来计算上面这个积分.

解法一 化为定积分直接计算. 如图 11-18, Γ 由 AB, BC, CA 三条有向线段组成,

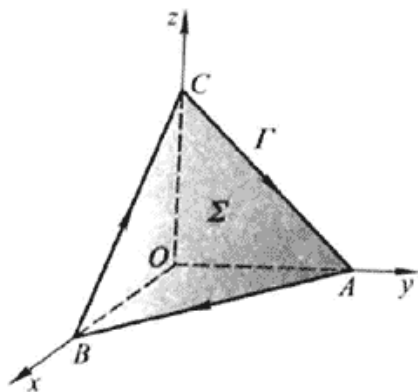


图 11-18

$AB: z = 0, x = t, y = 1 - t, t$ 从 0 变到 1;

$BC: y = 0, x = t, z = 1 - t, t$ 从 1 变到 0;

$CA: x = 0, y = t, z = 1 - t, t$ 从 0 变到 1.

于是

$$\int_{AB} ydx + zdy + xdz = \int_{AB} ydx = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{BC} ydx + zdy + xdz = \int_{BC} xdz = \int_1^0 t \cdot (-1)dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{CA} ydx + zdy + xdz = \int_{CA} zdy = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}.$$

因此

$$W = \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = \frac{3}{2}.$$

* 解法二 利用斯托克斯公式计算. 取 Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 的下侧被 Γ 所围的部分, 则 Σ 在任一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dS = \sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS \\ &= \sqrt{3} \cdot (\Sigma \text{ 的面积}) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

第十二章 无穷级数

习题 12-1

常数项级数的概念和性质

1. 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n};$$
$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

解 (1) $\frac{1+1}{1+1^2} + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{1+5}{1+5^2} + \cdots$.

(2) $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots$.

(3) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots$.

(4) $\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \cdots$.

2. 根据级数收敛与发散的定定义判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$
$$(2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots;$$
$$(3) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots;$$
$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

解 设级数的部分和为 s_n .

(1) 因为

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

所以根据定义可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 发散.

(2) 由于 $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 从而

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2},$$

所以根据定义可知级数收敛.

(3) 由于 $u_n = \sin \frac{n\pi}{6} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{n\pi}{6}}{2 \sin \frac{\pi}{12}} = \frac{\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi}{2 \sin \frac{\pi}{12}}$, 从而

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left[\left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{3\pi}{12} \right) + \left(\cos \frac{3\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \left(\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{2n+1}{12}\pi \right), \end{aligned}$$

因为当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\cos \frac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在, 所以 s_n 的极限不存在, 即级数发散.

$$(4) \quad s_n = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1),$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, 故级数发散.

3. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \quad -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots;$$

$$(2) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots;$$

$$(3) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots;$$

$$(4) \quad \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots + \frac{3^n}{2^n} + \cdots;$$

$$(5) \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots.$$

解 (1) 此级数为公比 $q = -\frac{8}{9}$ 的等比级数, 因 $|q| < 1$, 故该级数收敛.

(2) 此级数的部分和

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right),$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = +\infty$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty,$$

即该级数发散.

(3) 此级数的一般项 $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$, 不满足级数收敛的必要条件, 故该级数发散.

(4) 此级数为公比 $q = \frac{3}{2}$ 的等比级数, 因 $|q| > 1$, 故该级数发散.

(5) 此级数的一般项 $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$, 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 分别是公比 $q = \frac{1}{2}$ 与 $q = \frac{1}{3}$ 的等比级数, 而 $|q| < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 均收敛. 根据收敛级数的性质可知, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$ 收敛.

 * 4. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$(2) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \quad |s_{n+p} - s_n| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + u_{n+p}| \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \frac{(-1)^{n+4}}{n+3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \right|. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \cdots + \begin{cases} \frac{1}{n+p}, & p \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}, & p \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

故 $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} > 0, \forall p \in \mathbf{Z}^+.$

于是,当 p 为奇数时,

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) < \frac{1}{n+1};$$

当 p 为偶数时,

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1} \right) - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+1}.$$

因此,对任意给定的正数 ε ,取正整数 $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$,则当 $n > N$ 时,对任何正整数 p ,都有

$$|s_{n+p} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

根据柯西收敛原理知,级数收敛.

(2) 当 n 是 3 的倍数时,如果取 $p = 3n$,则必有

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= \left| \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \frac{1}{n+4} + \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \right| \\ &> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{4n-2} > \underbrace{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \cdots + \frac{1}{4n}}_{n \uparrow} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

于是对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$,不论 N 为何正整数,当 $n > N$ 并 n 是 3 的倍数,且当 $p = 3n$ 时,就有

$$|s_{n+p} - s_n| > \varepsilon_0,$$

根据柯西收敛原理知,级数发散.

注 柯西收敛原理是这样叙述的:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件为“对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,对任意的正整数 p ,都有 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ ”.

因此按柯西收敛原理,判别级数发散的充要条件就是对上述条件的否定,即“对某个正数 ε_0 ,不论 N 取什么正整数,至少有一个 $n (> N)$ 且至少有一个 $p \in \mathbf{Z}^+$,使得 $|s_{n+p} - s_n| \geq \varepsilon_0$ ”.

$$\begin{aligned} (3) \quad |s_{n+p} - s_n| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\ &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}.$$

由此可知,对任意给定的正数 ε ,取正整数 $N \geq \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$,当 $n > N$ 时,对一切正整数 p ,都有 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. 按柯西收敛原理,该级数收敛.

(4) 本题与(2)类同,因 $u_n = \frac{1}{3n+1} + \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right) > \frac{1}{3n+1} \geq \frac{1}{4n}$,故对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{8}$,不论 n 取什么正整数,取 $p = n$ 时,就有 $|s_{n+p} - s_n| = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) > \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. 因此该级数发散.

习题 12-2

常数项级数的审敛法

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$;

(2) $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$;

(3) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$;

(4) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{2^3} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a > 0)$.

解 (1) 解法一 $u_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} (n = 1, 2, \cdots)$, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故各项乘 $\frac{1}{2}$ 后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 也发散, 由比较审敛法知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散.

解法二 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n = \frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{n+n^2} = \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法知原级数

发散.

$$(3) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = 1, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛, 由极限形式的比较审敛法知原}$$

级数收敛.

$$(4) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = \pi, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ 收敛, 故由极限形式的比较审}$$

敛法知原级数收敛.

$$(5) \text{ 当 } 0 < a \leq 1 \text{ 时, } \frac{1}{1+a^n} \geq \frac{1}{2}, \text{ 一般项不趋于零, 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \text{ 发散; 当}$$

$$a > 1 \text{ 时, } \frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n}, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \text{ 收敛, 故由比较审敛法知 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \text{ 收敛.}$$

 2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{3^n}{n \cdot 2^n} + \cdots; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

解 (1) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \bigg/ \frac{3^n}{n2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{3}{2} > 1$, 故级数发散.

(2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \bigg/ \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$, 故级数收敛.

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \bigg/ \frac{2^n n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 1$, 故级数收敛.

$$(4) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} \bigg/ n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数收敛.

 * 3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;
 (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, 其中 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, a_n, b, a 均为正数.

解 (1) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, 故级数收敛.

(2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, 故级数收敛.

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1$, 故级数收敛.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$.

当 $b < a$ 时, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, 故级数收敛;

当 $b > a$ 时, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, 故级数发散;

当 $b = a$ 时, 级数的收敛性不能确定 (例如, $b = 1, a_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n =$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散; 又如, $b = 1, a_n = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty), \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛).

4. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots$;

(2) $\frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$;

(5) $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \cdots$;

(6) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} + \cdots (a > 0, b > 0)$.

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1$, 由比值审敛法知级数收敛.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, 由比值审敛法知级数收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(n+2)} \bigg/ \frac{1}{n} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由极限形式的比较审敛法知原

级数发散.

$$(4) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} / \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}} = \pi, \text{ 而几何级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ 收敛, 故}$$

由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

$$(5) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \neq 0, \text{ 故级数发散.}$$

$$(6) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na+b} / \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a+\frac{b}{n}} = \frac{1}{a}, \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 故由极限形式的}$$

比较审敛法知原级数发散.

 5. 判定下列级数是否收敛. 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \cdots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

$$(3) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n} + \cdots;$$

$$(4) \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

解 (1) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 是发散的; 又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是交错级数,

满足 $|u_n| > |u_{n+1}|$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

$$(2) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1, \text{ 由比值审敛法知级数 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛,}$$

故原级数绝对收敛.

$$(3) u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^n}, \text{ 因 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^n} \text{ 是公比 } q = \frac{1}{2} (|q| < 1) \text{ 的等}$$

比级数, 故收敛, 从而原级数绝对收敛.

$$(4) u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}, |u_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ 是发散的, 故由}$$

比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是交错级数, 满足 $|u_n| > |u_{n+1}|$ 且

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(5) $u_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$, $|u_n| = \frac{2^n \cdot 2^n \cdot \dots \cdot 2^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$, 由于 $2^n > k (k = 1, 2, \dots, n)$, 故 $|u_n| > 1$, 即原级数的一般项 u_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时不趋于零, 故该级数发散.

习题 12-3

幂级数

1. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots;$$

$$(2) 1 - x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \dots;$$

$$(3) \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} + \dots;$$

$$(4) \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 3^n} + \dots;$$

$$(5) \frac{2}{2}x + \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{2^3}{10}x^3 + \dots + \frac{2^n}{n^2 + 1}x^n + \dots;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}.$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径为 1, 收敛区间是 $(-1, 1)$.

(2) $n \geq 1$ 起, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, 故收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, 故收敛半径为 $+\infty$, 收敛区间是 $(-\infty, +\infty)$.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$, 故收敛半径为 3, 收敛区间为 $(-3, 3)$.

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} = 2$, 故收敛半径为 $\frac{1}{2}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(6) 这是缺(偶次幂)项的级数, 把 $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 视为数项级数的一般项 u_n ,

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} |x|^2 = |x|^2,$$

当 $|x| < 1$ 时,级数绝对收敛;当 $|x| > 1$ 时,因一般项 $u_n \neq 0 (n \rightarrow \infty)$,级数发散,故原级数收敛半径为 1,收敛区间为 $(-1, 1)$.

(7) 这是缺(奇次幂)项的级数.

解法一 与(6)类似,将它按数项级数处理,用比值法确定收敛半径和收敛区间.

解法二 令 $t = x^2$, 先讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{n-1}$ 的收敛区间.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2},$$

故该级数的收敛半径为 2,因此,原级数的收敛半径为 $\sqrt{2}$,收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x-5| < 1$ 时,级数

收敛;当 $|x-5| > 1$ 时,级数发散. 故级数的收敛区间为 $(4, 6)$.

 2. 利用逐项求导或逐项积分,求下列级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1};$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$

(3) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots;$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3}.$

解 (1) 容易求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1 < x < 1$ 时,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x nx^{n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

在上式两端对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在 $x = \pm 1$ 处发散,故它的和函数 $s(x) = \frac{1}{(1-x)^2} (-1 < x < 1)$.

(2) 不难求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1 < x < 1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分, 并由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0, 故得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} &= \int_0^x \frac{x^4}{1-x^4} dx \\ &= \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x.\end{aligned}$$

又原级数在 $x = \pm 1$ 处均发散, 故它的和函数

$$s(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x \quad (-1 < x < 1).$$

(3) 记级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 其收敛半径为 1. 当 $-1 < x < 1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分, 并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0, 故得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

又原级数在 $x = \pm 1$ 处均发散, 故它的和函数

$$s(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

(4) 容易求得此级数的收敛半径为 1, 收敛域为 $(-1, 1)$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \right)',$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^3}{1-x}$. 又 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \right)' = \left(\frac{x^3}{1-x} \right)' = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$, 故原级数的和函数

$$s(x) = x^2 \cdot \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^4 - 2x^5}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1).$$

习题 12-4

函数展开成幂级数

1. 求函数 $f(x) = \cos x$ 的泰勒级数, 并验证它在整个数轴上收敛于这个函数.

解 在定点 x_0 处, 因

$$f^{(n)}(x_0) = \cos\left(x_0 + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

故 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\begin{aligned} & \cos x_0 + \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)(x - x_0) + \frac{\cos(x_0 + \pi)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ & \frac{\cos\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots. \end{aligned}$$

因为对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\cos\left(\xi + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间), 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, 于是得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

所以在整个数轴上, 有

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x &= \cos x_0 + \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)(x - x_0) + \frac{\cos(x_0 + \pi)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ & \cdots + \frac{\cos\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots. \end{aligned}$$

 2. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

(1) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$

(2) $\ln(a+x) (a > 0);$

(3) $a^x;$

(4) $\sin^2 x;$

(5) $(1+x)\ln(1+x);$

(6) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

解 (1) 由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$, 故

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

于是

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) $\ln(a+x) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)$, 利用

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, +1],$$

得

$$\ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{a}\right)^n, \quad x \in (-a, +a].$$

(3) 利用 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$, 得

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(4) 解法一 利用

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

得

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n}}{2(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

解法二 $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \int_0^x (\sin^2 x)' dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

(5) 解法一 因为

$$[(1+x) \ln(1+x)]' = \ln(1+x) + 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1).$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分得

$$\begin{aligned} (1+x) \ln(1+x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)n}, \quad x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

又在 $x=1$ 处, 上式右端的幂级数收敛, 且函数 $(1+x) \ln(1+x)$ 连续, 故

$$(1+x) \ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}, \quad x \in (-1, 1].$$

解法二 利用 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in (-1, 1]$, 得

$$\begin{aligned} (1+x) \ln(1+x) &= \ln(1+x) + x \ln(1+x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n-1} \right] x^n \\
 &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}, \quad x \in (-1, 1].
 \end{aligned}$$

(6) 解法一 利用 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots, x \in [-1, 1]$, 并因为 $\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} - 1$, 以 x^2 替换上面幂级数中的 x , 得

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \sqrt{1+x^2} - 1 \\
 &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n} + \cdots
 \end{aligned}$$

在 $(-1, 1)$ 内将上式两端对 x 求导, 得

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)} x^{2n-1} + \cdots \\
 &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)} x^{2n-1} \\
 &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).
 \end{aligned}$$

在 $x = \pm 1$ 处上式右端的级数均收敛且函数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 连续, 故

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

解法二 将 x^2 替换展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n \quad (x \in (-1, 1])$$

中的 x , 得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1].$$

从而得

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n+1} \\
 &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].
 \end{aligned}$$

例 3. 将下列函数展开成 $x-1$ 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

(1) $\sqrt{x^3}$; (2) $\lg x$.

解 (1) 当 $m > 0$ 时, 因

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \\ x \in [-1, 1],$$

而 $\sqrt{x^3} = [1 + (x-1)]^{\frac{3}{2}},$

在以上二项展开式中取 $m = \frac{3}{2}$, 并用 $x-1$ 替换其中的 x , 得

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3} &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) (x-1)^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{n!} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \cdot \cdots \cdot \left(\frac{3}{2} - n + 1 \right) (x-1)^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^{n+2}(n+2)!} (x-1)^{n+2} \\ &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{3}{(n+1)(n+2)2^n} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n+2}, \quad x \in [0, 2]. \end{aligned}$$

(2) $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln[1 + (x-1)],$ 利用

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1],$$

将上式中的 x 换成 $x-1$, 得

$$\lg x = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad x \in (0, 2].$$

 4. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $x + \frac{\pi}{3}$ 的幂级数.

解 $\cos x = \cos \left[\left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$

将 $x + \frac{\pi}{3}$ 替换以下两式

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

中的 x , 得

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} \right], \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

 5. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解 利用 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$ 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{3+x-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-3}{3}\right)^n, \quad \frac{3-x}{3} \in (-1, 1),\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n, \quad x \in (0, 6).$$

例 6. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

解 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$

其中

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-3+(x+4)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+4}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n,$$

$$\frac{x+4}{3} \in (-1, 1), \text{ 即 } x \in (-7, -1);$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+(x+4)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n,$$

$$\frac{x+4}{2} \in (-1, 1), \text{ 即 } x \in (-6, -2). \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3x+2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n,\end{aligned}$$

$$x \in (-7, -1) \cap (-6, -2) = (-6, -2).$$

习题 12-5

函数的幂级数展开式的应用

例 1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

- (1) $\ln 3$ (误差不超过 0.000 1);
- (2) $\sqrt{e}$ (误差不超过 0.001);
- (3) $\sqrt[9]{522}$ (误差不超过 0.000 01);
- (4) $\cos 2^\circ$ (误差不超过 0.000 1).

解 (1) $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right), \quad x \in (-1, 1).$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 3$, 可得 $x = \frac{1}{2}$. 从而

$$\ln 3 = \ln \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} + \cdots\right].$$

$$\begin{aligned} |r_n| &= 2\left[\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}} + \cdots\right] \\ &= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left[1 + \frac{(2n+1)2^{2n+1}}{(2n+3)2^{2n+3}} + \frac{(2n+1)2^{2n+1}}{(2n+5)2^{2n+5}} + \cdots\right] \\ &< \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) \\ &= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}}, \end{aligned}$$

$$|r_5| < \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 2^8} \approx 0.00012,$$

$$|r_6| < \frac{1}{3 \cdot 13 \cdot 2^{10}} \approx 0.00003 < 10^{-4},$$

故取 $n=6$, 则

$$\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{11 \cdot 2^{11}}\right), \text{ 考虑到舍入误差, 计算时应取五}$$

位小数, 从而得 $\ln 3 \approx 1.0986$.

$$(2) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$\begin{aligned} \sqrt{e} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \cdots + \frac{1}{n!2^n} + \cdots, \\ r_n &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!2^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{(n+2) \cdot 2} + \frac{1}{(n+2)(n+3) \cdot 2^2} + \cdots\right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)!2^n}, \end{aligned}$$

$$r_4 < \frac{1}{5! \cdot 2^4} \approx 0.0005 < 10^{-3},$$

故取 $n=4$, 计算时取四位小数可得

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} \approx 1.648.$$

$$(3) \sqrt[9]{522} = \sqrt[9]{2^9 + 10} = 2 \left(1 + \frac{10}{2^9} \right)^{\frac{1}{9}}, \text{ 因}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

故

$$\begin{aligned} \sqrt[9]{522} &= 2 \left(1 + \frac{10}{2^9} \right)^{\frac{1}{9}} = 2 \left[1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} + \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} - 1 \right)}{2!} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{9} - n + 1 \right)}{n!} \cdot \frac{10^n}{2^{9n}} + \cdots \right] \\ &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9}}{2!} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \cdots \right) \\ &= 2 + \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \cdots, \end{aligned}$$

上式右端从第 2 项起为一交错级数, 故有

$$|r_3| \leq u_4 = \frac{8 \cdot 17}{3 \cdot 9^3} \cdot \frac{10^3}{2^{27}} < 10^{-6}.$$

取 3 项, 并在计算时取六位小数, 可得

$$\sqrt[9]{522} \approx 2 + \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{8}{9^2} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} \approx 2.00430.$$

$$(4) \cos 2^\circ = \cos \frac{\pi}{90} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{90} \right)^4 - \cdots,$$

上式是交错级数,

$$|r_2| \leq u_3 = \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{90} \right)^4 < 10^{-7},$$

故取 2 项并在计算时取五位小数, 可得

$$\cos 2^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 \approx 0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

$$(1) \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \text{ (误差不超过 } 0.0001 \text{)};$$

$$(2) \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx \text{ (误差不超过 } 0.001 \text{)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx &= \int_0^{0.5} [1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots + (-1)^n x^{4n} + \cdots] dx \\ &= \left(x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{13}x^{13} + \cdots \right) \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} + \cdots, \end{aligned}$$

上式右端为一交错级数,有

$$|r_3| \leq u_4 = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} \approx 0.000009 < 10^{-4},$$

故取 3 项,并在计算时取五位小数,可得

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \approx 0.4940.$$

$$(2) \text{ 因 } \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^{0.5} \left[1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots \right] dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} - \frac{x^7}{49} + \cdots \right) \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} + \cdots, \end{aligned}$$

由于

$$|r_3| \leq u_4 = \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} \approx 0.0002 < 10^{-3},$$

所以取 3 项,并在计算时取四位小数,可得

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0.487.$$

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

$$(1) y' - xy - x = 1;$$

$$(2) y'' + xy' + y = 0;$$

$$(3) (1-x)y' = x^2 - y.$$

解 (1) 设方程的解为 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ (a_0 为任意常数),

代入方程,则有如下竖式(注意对齐同次幂项)

$$\begin{array}{rcl}
 y' & = & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\
 -xy & = & -a_0x - a_1x^2 - \cdots - a_{n-1}x^n - \cdots \\
 -x & = & -x
 \end{array}$$

$1 = a_1 + (2a_2 - a_0 - 1)x + (3a_3 - a_1)x^2 + \cdots + [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^n + \cdots$ 比较系数可得

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1, & a_2 &= \frac{a_0 + 1}{2}, \\
 a_3 &= \frac{1}{3}, & a_4 &= \frac{a_2}{4} = \frac{a_0 + 1}{2 \times 4}, \\
 a_5 &= \frac{a_3}{5} = \frac{1}{3 \times 5}, & a_6 &= \frac{a_4}{6} = \frac{a_0 + 1}{2 \times 4 \times 6}, \cdots, \\
 a_{2n-1} &= \frac{1}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}, & a_{2n} &= \frac{a_0 + 1}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} = \frac{a_0 + 1}{n!2^n}.
 \end{aligned}$$

不难求出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 的收敛域都是 $(-\infty, +\infty)$, 故

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)} + (a_0 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!2^n} - 1 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)} + (a_0 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1.
 \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{\frac{x^2}{2}}$, 记 $a_0 + 1 = C$, $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = (2n-1)!!$, 则

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!} x^{2n-1} - 1, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是方程的解, 其中 a_0, a_1 是任意常数, 则

$$\begin{aligned}
 y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\
 y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,
 \end{aligned}$$

代入方程 $y'' + xy' + y = 0$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n + a_n] x^n = 0.$$

故必有

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0,$$

即

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

可见,当 $n = 2(k-1)$ 时,

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \left(-\frac{1}{2k}\right)a_{2k-2} = \left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2k-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)a_0 \\ &= \frac{a_0(-1)^k}{k!2^k}. \end{aligned}$$

当 $n = 2k-1$ 时,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \left(-\frac{1}{2k+1}\right)a_{2k-1} = \left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)a_1 \\ &= \frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!!}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域均为 $(-\infty, +\infty)$, 故

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0(-1)^n}{n!2^n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1(-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \end{aligned}$$

即 $y = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

(3) 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是方程的解, 代入方程, 得

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

有 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2,$

将上式左边第一个级数写成 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} + (1-n) a_n] x^n = x^2.$$

比较系数, 得

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 &= 0, \quad 2a_2 = 0, \quad 3a_3 - a_2 = 1, \\ (n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n &= 0 \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

即 $a_1 = -a_0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n \quad (n \geq 3),$

或写成

$$a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)} \quad (n \geq 4).$$

于是 $y = a_0 - a_0 x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{10} x^5 + \cdots + \frac{2}{n(n-1)} x^n + \cdots$, 或写成

$$y = a_0(1-x) + x^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n + \cdots \right].$$

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) y' = y^2 + x^3, y|_{x=0} = \frac{1}{2};$$

$$(2) (1-x)y' + y = 1+x, y|_{x=0} = 0.$$

解 (1) 因 $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$, 故设方程的特解为 $y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

代入方程, 有

$$\begin{aligned} & a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ &= x^3 + \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)^2 \\ &= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)^2 \\ &= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \left[a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) x^4 + \cdots \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{i+j=n} a_i a_j \right) x^n + \cdots \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & a_1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2 - a_1^2)x^2 + (4a_4 - a_3 - 2a_1 a_2)x^3 \\ & + \cdots + \left[(n+1)a_{n+1} - a_n - \sum_{i+j=n} a_i a_j \right] x^n + \cdots = \frac{1}{4} + x^3. \end{aligned}$$

比较系数, 得

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad 2a_2 - a_1 = 0, \quad 3a_3 - a_2 - a_1^2 = 0, \quad 4a_4 - a_3 - 2a_1 a_2 = 1,$$

$$\cdots, (n+1)a_{n+1} - a_n - \sum_{i+j=n} a_i a_j = 0 \quad (n \geq 4).$$

$$\text{依次解得} \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{8}, \quad a_3 = \frac{1}{16}, \quad a_4 = \frac{9}{32}, \cdots$$

$$\text{故} \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \cdots.$$

(2) 因 $y|_{x=0} = 0$, 故设 $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 是方程的特解, 则 $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, 代入方程, 有

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1+x,$$

$$\text{即} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1+x,$$

或写成

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n]x^n = 1+x.$$

比较系数,得 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n (n \geq 2)$, 或写成

$$a_n = \frac{n-2}{n}a_{n-1} = \frac{(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 3).$$

故 $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}x^n + \cdots$.

5. 验证函数 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$ 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$, 并利用此结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots, \\ y'(x) &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots, \\ y''(x) &= x + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots, \end{aligned}$$

以上三式相加得

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

所以函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$.

(2) $y'' + y' + y = e^x$ 对应的齐次方程 $y'' + y' + y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

根为 $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 因此齐次方程的通解为

$$Y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

设非齐次微分方程的特解为 $y^* = Ae^x$, 代入方程 $y'' + y' + y = e^x$, 得 $A = \frac{1}{3}$, 于是

$y^* = \frac{1}{3}e^x$, 且非齐次微分方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{1}{3}e^x.$$

由(1)知, 幂级数的和函数 $y(x)$ 满足: $y(0) = 1, y'(0) = 0$, 由此定出上式中的 C_1 与 C_2 , 令

$$y(0) = 1 = C_1 + \frac{1}{3},$$

$$y'(0) = 0 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{3},$$

解得 $C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0$. 于是由微分方程初值问题解的唯一性, 可得所求幂级数的和函数为

$$y(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

 6. 利用欧拉公式将函数 $e^x \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 知

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}),$$

故

$$e^x \cos x = e^x \cdot \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^x \cdot e^{ix}) = \operatorname{Re}[e^{(1+i)x}].$$

因为

$$\begin{aligned} e^{(1+i)x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1+i)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \operatorname{Re}[e^{(1+i)x}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{4} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

* 习题 12-6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

 1. 已知函数序列 $s_n(x) = \sin \frac{x}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于 0.

(1) 问 $N(\varepsilon, x)$ 取多大, 能使当 $n > N$ 时, $s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε ?

(2) 证明 $s_n(x)$ 在任一有限区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

解 (1) 由于 $|s_n(x) - 0| = \left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n}$, 因此对于正数 ε , 取 $N(\varepsilon, x) \geq \frac{|x|}{\varepsilon}$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|s_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} < \varepsilon.$$

证 (2) 记 $M = \max\{|a|, |b|\}$, 则 $\forall x \in [a, b], |x| \leq M$, 于是

$$|s_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n}.$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{M}{\varepsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a, b]$ 都有

$$|s_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} < \frac{M}{N} < \varepsilon,$$

即 $s_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 0.

 2. 已知级数 $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问 $N(\varepsilon, x)$ 取多大, 能使当 $n > N$ 时, 级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε ;

(3) 分别讨论级数在区间 $[0, 1]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上的一致收敛性.

解 (1) 设该级数的和函数为 $s(x)$, 当 $x=0$ 时, $s(0)=0$; 当 $x \neq 0$ 时, 该级数是公比为 $\frac{1}{1+x^2}$ 的等比级数, 且 $\frac{1}{1+x^2} < 1$, 故

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

于是

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad r_n(x) &= \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \left[1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, $r_n(x)=0$, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N=1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|r_n(x)| < \varepsilon;$$

当 $x \neq 0$ 时, $r_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, \forall \varepsilon > 0$ (不妨设

$\varepsilon < 1$), 取

$$N = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)} \right] + 1,$$

则当 $n > N$ 时,

$$|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \varepsilon.$$

(3) 该级数的各项 $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 在区间 $[0, 1]$ 上是连续的,

如果 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 则由定理 1 知, 其和函数 $s(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 今 $s(x)$ 在 $[0, 1]$ 有间断点 $x=0$, 由此推知该级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上, 因为

$$|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

所以, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\log_{\frac{4}{5}} \varepsilon] + 1$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 有

$$|r_n(x)| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \varepsilon.$$

即级数在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上一致收敛.

 3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \quad 0 < x < 1.$$

解 (1) 此级数为交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件.

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$,

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\dots+x^{2n}} < \frac{1}{n},$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$|r_n(x)| < \varepsilon,$$

即该级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1}), \text{ 其部分和函数}$$

$$s_n(x) = (1-x) + (x-x^2) + \dots + (x^n - x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

有和函数

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{n+1}) = 1, \quad x \in (0, 1).$$

且

$$|r_n(x)| = |s_n(x) - s(x)| = x^{n+1}, \quad x \in (0, 1).$$

取一列 $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_n \in (0, 1)$. 于是对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, 不论 n 多么

大,总有 $x_n \in (0,1)$,使得

$$|r_n(x_n)| = \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]^{n+1} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

因此,该级数在开区间 $(0,1)$ 内不一致收敛.

4. 利用魏尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n!}, |x| < 10;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}, 0 \leq x < +\infty.$$

证 (1) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 因为 $|\cos nx| \leq 1$, 所以

$$\left| \frac{\cos nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 从而原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 因为 $|\sin nx| \leq 1$, 所以

$$\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{(n^4 + x^4)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 从而原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}, \text{ 由于当 } x \in [0, +\infty) \text{ 时,}$$

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{1}{2!}(nx)^2 + \frac{1}{3!}(nx)^3 + \cdots > \frac{1}{2!}(nx)^2 = \frac{n^2 x^2}{2},$$

故
$$\left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right| < \frac{2}{n^2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 故原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(4) \forall x \in (-10, 10), \left| \frac{e^{-nx}}{n!} \right| < \frac{(e^{10})^n}{n!}, \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{10})^n}{n!} \text{ 收敛 (收敛于 } e^{e^{10}} - 1),$$

故原级数在 $(-10, 10)$ 上一致收敛.

$$(5) \forall x \in [0, +\infty), \text{ 由于 } 0 < e^{-nx} \leq 1, \text{ 故}$$

$$\left| \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2} \right| = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2 + x^2} < \frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 从而原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

习题 12-7

傅里叶级数

例 1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为:

$$(1) f(x) = 3x^2 + 1 \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(2) f(x) = e^{2x} \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi \leq x < 0, \\ ax, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (a, b \text{ 为常数, 且 } a > b > 0).$$

解 (1) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) dx = 2(\pi^2 + 1),$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} (3x^2 + 1) \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} 6x \sin nx dx \\ &= \frac{6}{n^2 \pi} \left(x \cos nx \right)_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{12}{n^2} (-1)^n - \frac{6}{n^3 \pi} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n 12}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

由于 $(3x^2 + 1) \sin nx$ 是奇函数, 故

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \sin nx dx = 0.$$

因为 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故

$$f(x) = \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(2) a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} \left(e^{2x} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} n \sin nx dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{2\pi} + \frac{n}{4\pi} \left(e^{2x} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} n \cos nx dx \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{2\pi} - \frac{n^2}{4} a_n,$$

故

$$a_n = \frac{2(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

用分部积分法得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin nx dx = -\frac{n}{2} a_n = -\frac{n(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$ 处不连续, 故

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} (2\cos nx - n\sin nx) \right],$$

$$x \neq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$(3) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 b x dx + \int_0^{\pi} a x dx \right) = \frac{\pi}{2} (a - b).$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 b x \cos nx dx + \int_0^{\pi} a x \cos nx dx \right),$$

在上式右端第一个积分中令 $x = -t$,

$$\int_{-\pi}^0 b x \cos nx dx = \int_0^{\pi} (-bt \cos nt) dt = \int_0^{\pi} (-bx \cos nx) dx,$$

故

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (a - b) x \cos nx dx = \frac{a - b}{n\pi} \left(x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) \\ &= \frac{a - b}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{b - a}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n] \quad (n = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 b x \sin nx dx + \int_0^{\pi} a x \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (a + b) x \sin nx dx = \frac{a + b}{n\pi} \left(-x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) \\ &= \frac{a + b}{n\pi} \left[(-1)^{n+1} \pi + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{a + b}{n} (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$ 处不连续, 故

$$f(x) = \frac{\pi}{4} (a - b) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1 - (-1)^n] (b - a)}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} (a + b)}{n} \sin nx \right\},$$

$$x \neq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

 2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

$$(1) f(x) = 2 \sin \frac{x}{3} \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解 (1) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数, $\varphi(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内连续, $x = \pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件, 故在 $(-\pi, \pi)$ 内, 它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

由于 $2\sin \frac{x}{3}$ 是奇函数, 故 $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$;

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2\sin \frac{x}{3} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[\cos\left(\frac{1}{3} - n\right)x - \cos\left(\frac{1}{3} + n\right)x \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi}{n - \frac{1}{3}} - \frac{\sin\left(n + \frac{1}{3}\right)\pi}{n + \frac{1}{3}} \right] \\ &= \frac{6}{\pi} \left[\frac{-\cos n\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3n - 1} - \frac{\cos n\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3n + 1} \right] \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{n}{9n^2 - 1} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{9n^2 - 1} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

(2) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数, 它在 $(-\pi, \pi)$ 内连续, $x = \pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件, 故在 $(-\pi, \pi)$ 内它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^x dx + \int_0^\pi dx \right) = \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{\pi}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^x \cos nx dx + \int_0^\pi \cos nx dx \right) = \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^x \sin nx dx + \int_0^\pi \sin nx dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-n[1 - (-1)^n e^{-\pi}]}{1 + n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2} \cos nx + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{-n + (-1)^n n e^{-\pi}}{1 + n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right] \sin nx \right\}, \quad x \in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

3. 将函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2} (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ 是偶函数, 故 $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x + \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi}{n - \frac{1}{2}} + \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi}{n + \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos n\pi}{2n-1} + \frac{\cos n\pi}{2n+1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 故

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2-1} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 是奇函数, 故 $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin nx dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left. \frac{-x \cos nx}{n} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx \right) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{-\cos \frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{\pi n^2} + \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi}{n} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$ 处间断, 故

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin nx, \quad x \neq (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z}).$$

5. 将函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成正弦级数.

解 作

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 令 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 处间断, 又在 $(0, \pi]$ 上, $\Phi(x) \equiv f(x)$, 因此 $\Phi(x)$ 的傅里叶级数在 $(0, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x-\pi}{2n} \cos nx - \frac{1}{2n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad x \in (0, \pi].$$

6. 将函数 $f(x) = 2x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数.

令

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [0, \pi], \\ -2x^2, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

是 $f(x)$ 的奇延拓, 又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$ 处间断, 又在 $[0, \pi]$ 上 $\Phi(x) \equiv f(x)$, 故它的傅里叶级数在 $[0, \pi)$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \sin nx dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n 2}{n^3} - \frac{2}{n^3} \right] \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) (-1)^n - \frac{2}{n^3} \right] \sin nx, \quad x \in [0, \pi).$$

(2) 展开成余弦级数.

令 $\varphi(x) = 2x^2, x \in (-\pi, \pi]$ 是 $f(x)$ 的偶延拓, 又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续, 又在 $[0, \pi]$ 上, $\Phi(x) \equiv f(x)$, 故它的傅里叶级数在 $[0, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 dx = \frac{4}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{8}{n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

故

$$f(x) = \frac{2}{3} \pi^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in [0, \pi].$$

 7. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π . 证明:

(1) 若 $f(x - \pi) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$ ($k = 1, 2, \cdots$);

(2) 若 $f(x - \pi) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \cdots$).

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1) \quad a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} [-f(x - \pi)] dx \right], \end{aligned}$$

在上式第二个积分中令 $x - \pi = u$, 则

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx - \int_{-\pi}^0 f(u) du \right] = 0.$$

同理可得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} [-f(x - \pi)] \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \cos(n\pi + nu) du \right] \end{aligned}$$

及

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \sin(n\pi + nu) du \right].$$

当 $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 时, $\cos(n\pi + nu) = \cos nu, \sin(n\pi + nu) = \sin nu$,

于是有

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos 2kx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \cos 2kud u \right] = 0,$$

及

$$b_{2k} = 0 \quad (k \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 与(1)的做法类似,有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^0 f(u) \cos (n\pi + nu) du \right],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_{-\pi}^0 f(u) \sin (n\pi + nu) du \right].$$

当 $n = 2k + 1 (k \in \mathbf{N})$ 时, $\cos (n\pi + nu) = -\cos nu$, $\sin (n\pi + nu) = -\sin nu$, 故有

$$a_{2k+1} = 0, \quad b_{2k+1} = 0 \quad (k \in \mathbf{N}).$$

习题 12-8

一般周期函数的傅里叶级数

 1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

$$(1) f(x) = 1 - x^2 \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \right);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -3 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

解 (1) 函数 $f(x)$ 是半周期 $l = \frac{1}{2}$ 的偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) dx = \frac{11}{6},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) \cos \frac{n\pi x}{\frac{1}{2}} dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) \cos (2n\pi x) dx \\ &= 4 \left[\frac{1 - x^2}{2n\pi} \sin (2n\pi x) - \frac{2x}{4n^2\pi^2} \cos (2n\pi x) + \frac{2}{8n^3\pi^3} \sin (2n\pi x) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续, 故有

$$f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(2n\pi x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l = 1$.

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) dx = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x \cos(n\pi x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= \left[\frac{x}{n\pi} \sin(n\pi x) + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x \sin(n\pi x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(n\pi x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(n\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 其间断点为 $x = 2k, 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 故有

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos(n\pi x) + \frac{1}{n\pi} \left(1 - 2\cos \frac{n\pi}{2} \right) \sin(n\pi x) \right\}, \\ &\quad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ 2k, 2k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}. \end{aligned}$$

(3) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l = 3$.

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) dx + \int_0^3 dx \right] = -1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] \\ &= \frac{6}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] \\ &= \frac{6}{n\pi} (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 其间断点为 $x = 3(2k+1), k \in \mathbf{Z}$, 故有

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right\},$$

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{3(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2}, \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = x^2 (0 \leq x \leq 2).$$

解 (1) 展开为正弦级数:

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$, 又将 $\varphi(x)$ 作周期延拓得 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的奇函数, $\Phi(x)$ 处处连续, 又满足收敛定理的条件, 且在 $[0, l]$ 上, $\Phi(x) \equiv f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$, 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = - \int_{\frac{l}{2}}^0 t \cos n\pi \sin \frac{n\pi t}{l} dt = (-1)^{n-1} \int_0^{\frac{l}{2}} t \sin \frac{n\pi t}{l} dt,$$

于是

$$b_n = \frac{2}{l} [1 + (-1)^{n-1}] \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

当 $n = 2k$ 时, $b_{2k} = 0$; 当 $n = 2k-1$ 时,

$$b_{2k-1} = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} dx = \frac{4l}{(2k-1)^2 \pi^2} (-1)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}, \quad x \in [0, l].$$

展开为余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$, 再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$, 则 $\Psi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数, $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件, 且在 $[0, l]$ 上 $\Psi(x) \equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) dx \right] = \frac{l}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$, 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = (-1)^n \int_0^{\frac{l}{2}} t \cos \frac{n\pi t}{l} dt,$$

于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} [1 + (-1)^n] \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} [1 + (-1)^n] \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

当 $n = 2m-1$ 时, $a_{2m-1} = 0$; 当 $n = 2m$ 时,

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{4l}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2m)^2} [(-1)^m - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & m = 2k, \\ \frac{l}{\pi^2} \cdot \frac{(-2)}{(2k-1)^2}, & m = 2k-1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l}, \quad x \in [0, l].$$

(2) 展开为正弦级数:

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$, 再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓, 得以 4 为周期的周期函数 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件, 除了间断点 $x = 2(2k+1)$ ($k \in \mathbf{Z}$) 外处处连续, 且在 $[0, 2)$ 上, $\Phi(x) \equiv f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \left[-\frac{2}{n\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{4}{n\pi} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{8}{(n\pi)^2} \left[x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{16}{(n\pi)^3} \left[\cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1] \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3 \pi^2} [(-1)^n - 1] \right\} \sin \frac{n\pi x}{2}, \quad x \in [0, 2).$$

展开为余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$, 再将 $\psi(x)$ 作周期延拓, 得以 4 为周期的周期函数 $\Psi(x)$, 则 $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件. 且在 $[0, 2]$ 上 $\Psi(x) \equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \left[x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 - \frac{4}{n\pi} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \frac{8}{(n\pi)^2} \left[x \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= (-1)^n \frac{16}{(n\pi)^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= 0. \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad x \in [0, 2].$$

***3.** 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1)$ 上的表达式为 $f(x) = e^{-x}$. 试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

解 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 且除了点 $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) 外处处连续.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-(1+n\pi i)x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+n\pi i} [e^{-(1+n\pi i)x}]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2} (e^{-1} \cdot e^{-n\pi i} - e \cdot e^{n\pi i}) \\ &= \frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2} \frac{e \cos n\pi - e^{-1} \cos n\pi}{2} \\ &= (-1)^n \frac{e - e^{-1}}{2} \frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{e - e^{-1}}{2} \frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2} \cdot e^{in\pi x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

***4.** 设 $u(t)$ 是周期为 T 的周期函数, 已知它的傅里叶级数的复数形式为 (参阅本节例题)

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

试写出 $u(t)$ 的傅里叶级数的实数形式 (即三角形形式).

解 由题设知
$$c_n = \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

因

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

可见

$$a_n = \operatorname{Re}(2c_n), \quad b_n = \operatorname{Im}(2\overline{c_n}).$$

而 c_n 为实数, 故

$$a_n = \frac{2h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}, \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

故

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

总习题十二

1. 填空:

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是它收敛的 _____ 条件, 不是它收敛的 _____ 条件;

(2) 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的 _____ 条件;

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定 _____; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定 _____.

解 (1) 必要, 充分; (2) 充要; (3) 收敛, 发散.

2. 下题中给出了四个结果, 从中选出一个正确的结果.

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $|x|$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数为 ().

(A) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \cdots \right]$

(B) $\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2^2} \sin 2x + \frac{1}{4^2} \sin 4x + \frac{1}{6^2} \sin 6x + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \sin 2nx + \cdots \right]$

(C) $\frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \cdots \right]$

(D) $\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{4^2} \cos 4x + \frac{1}{6^2} \cos 6x + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \cos 2nx + \cdots \right]$

解 偶函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是余弦级数, 故排除 (B).

又因为

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \neq 0,$$

所以排除 (C) 与 (D), 从而选 (A).

3. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} \quad (a > 0, s > 0).$$

解 (1) $u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由极限形式的

比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n = \frac{(n!)^2}{2n^2} = \frac{[(n-1)!]^2}{2} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 由于一般项不趋于零, 故级数发散.

(3) $u_n = \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \leq \frac{n}{2^n} = v_n$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 是收敛的 (事实上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$, 据比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛), 故由比较审敛法知原级数收敛.

(4) $u_n = \frac{1}{\ln^{10} n}$, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = +\infty$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由极限形

式的比较审敛法知原级数发散.

注 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n}$ 时, 可考虑极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{10} n}{n}$.

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 \ln^9 x}{x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10!}{x} = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{10} n}{n} = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = +\infty.$$

(5) $u_n = \frac{a^n}{n^s}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^s = a$.

由比值审敛法知, 当 $a < 1$ 时级数收敛, 当 $a > 1$ 时级数发散.

当 $a = 1$ 时, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, 由 p -级数的结论知, 当 $s > 1$ 时级数收敛, 当 $s \leq 1$ 时级数发散.

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 也收敛.

证 根据题设条件知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0$. 由极限定义知, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 有 $u_n + v_n < 1$, 从而

$$(u_n + v_n)^2 < u_n + v_n \quad (n \geq N),$$

故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

例 5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛? 试说明理由.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不一定收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数时, 在题设条件下 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必定收敛. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. 根据收敛数列的保号性知, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时有 $\frac{v_n}{u_n} > 0$, 即有 $v_n > 0$. 于是, 按正项级数的比较审敛法知 $\sum_{n=N}^{\infty} v_n$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不是正项级数时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 可能不收敛. 例如: 若 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right] = 1$, 然而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例 6. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}; & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}; \\ (3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}; & (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}. \end{aligned}$$

解 (1) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$, $|u_n| = \frac{1}{n^p}$, 当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 是交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件, 因而收敛且为条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 由于 $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 此时级数发散. 综上所述, 当 $p > 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 级数发散.

(2) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}} \sin \frac{\pi}{n+1}$, $|u_n| \leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$ 收敛, 由比

较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 即原级数绝对收敛.

$$(3) \quad u_n = (-1)^n \ln \frac{n+1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,由极限形式的比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是交错级数且满足莱布尼茨定理的条件,因而收敛,故该级数条件收敛.

$$(4) u_n = (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1.$$

由比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,即原级数绝对收敛.

 7. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdot \dots \cdot (2^n)^{\frac{1}{3^n}}].$$

解 (1) 由于 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的部分和,而由正项级数的根值审敛法,当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{3} < 1,$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛,于是部分和 s_n 有界,从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0.$$

$$(2) 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdot \dots \cdot (2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{9}} \cdot 2^{\frac{3}{27}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{n}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n}},$$

为此,先求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n}\right)$. 记

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n},$$

则

$$\frac{1}{3}s_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}},$$

将以上两式相减,得

$$\frac{2}{3}s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^{n+1}},$$

即

$$s_n = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^n},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}.$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdot \dots \cdot (2^n)^{\frac{1}{3^n}}] = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{8}.$$

注 通过求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$, 然后求出 $s(1)$ 也可求得 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{3}{4}$.

8. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}.$$

解 (1) $u_n = a_n x^n, a_n = \frac{3^n + 5^n}{n}$. 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} = 5,$$

故收敛半径为 $R = \frac{1}{5}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

(2) $u_n = a_n x^n, a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2}} = \frac{e^2}{e} = e$$

$$\left(\text{或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \right),$$

故收敛半径为 $R = \frac{1}{e}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

(3) 令 $x+1=t$, 即 $x=t-1$, 先讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛区间.

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径 $R=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛区间为

$(-1, 1)$, 从而原级数的收敛区间为 $(-2, 0)$.

(4) 令 $\frac{x^2}{2} = t$, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$, 由第(3)题知该级数的收敛区间为 $(-1, 1)$.

因 $x = \pm \sqrt{2}t$, 故原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

9. 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}; \quad * (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n; \quad * (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

解 (1) $u_n(x) = \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{|x|^2}{2} = \frac{|x|^2}{2}.$$

当 $\frac{|x|^2}{2} < 1$ 时, 原级数收敛; 当 $\frac{|x|^2}{2} \geq 1$ 时, 因级数的一般项 $u_n(x) \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故级数发散. 因此原级数的收敛域为 $\frac{|x|^2}{2} < 1$, 即 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

设和函数为 $s(x)$, 即 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$, 从 0 到 x 积分并逐项积分:

$$\begin{aligned} \int_0^x s(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{2n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2 - x^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

上式两端对 x 求导, 得

$$s(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$* (2) u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x|^2 = |x|^2.$$

当 $|x| < 1$ 时, 级数收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 因级数一般项 $u_n(x) \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故级数发散; 当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ 是收敛的交错级数, 因此原级数的收敛域为 $[-1, 1]$. 设和函数为 $s(x)$, 则

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad \text{且} \quad s(0) = 0.$$

在 $(-1, 1)$ 内, 上式两端对 x 求导, 得

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$s(x) = s(x) - s(0) = \int_0^x s'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x.$$

又由于幂级数在 $x = \pm 1$ 处收敛, 且 $\arctan x$ 在 $x = \pm 1$ 处连续, 故

$$s(x) = \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

(3) 令 $x-1=t$, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$. 记其和函数为 $\varphi(t)$, 即有

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n \right)' \\ &= t \left(\frac{t}{1-t} \right)' = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad t \in (-1, 1). \end{aligned}$$

于是原级数的和函数

$$s(x) = \varphi(x-1) = \frac{x-1}{(2-x)^2}, \quad x \in (0, 2).$$

* (4) $u_n(x) = a_n x^n, a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$, 得幂级数的收敛半径 $R=1$. 当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 均收敛, 故幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

设和函数为 $s(x)$, 即 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

当 $x=0$ 时, $s(0)=0$;

当 $0 < |x| < 1$ 时,

$$xs(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

上式两端对 x 求导, 得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

再求导, 得

$$[xs(x)]'' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

注意到 $[xs(x)]'_{x=0} = 0$, 上式两端从 0 到 x 积分, 得

$$[xs(x)]' = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x),$$

再积分,得

$$xs(x) = - \int_0^x \ln(1-x) dx = (1-x) \ln(1-x) + x,$$

于是

$$s(x) = \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

由于幂级数在 $x = \pm 1$ 处收敛,故和函数分别在 $x = \pm 1$ 处左连续与右连续,于是

$$s(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1 = 1.$$

因此

$$s(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

 10. 求下列数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}.$$

解 (1) 利用 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$, 取 $x=1$, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

注 本题也可通过先求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$, 再求出 $s(1)$, 得到所求的数项级数的和.

(2) 因 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$, 故取 $x=1$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 1 + \sin 1).
 \end{aligned}$$

注 本题也可通过先求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 的和函数 $s(x)$, 再求出 $s(1)$, 得到所求的数项级数的和.

例 11. 将下列函数展开成 x 的幂级数:

$$(1) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) \frac{1}{(2-x)^2}.$$

解 (1) 因

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

而

$$(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1],$$

故

$$\begin{aligned}
 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= \int_0^x (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \\
 &= \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\
 &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].
 \end{aligned}$$

(2) 因

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x} \right)', \quad x \neq 2.$$

而

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n, \quad x \in (-2, 2).$$

故

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2-x)^2} &= \left(\frac{1}{2-x} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \right)' = \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \right)' \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1}, \quad x \in (-2, 2).
 \end{aligned}$$

例 12. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ e^x, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 且除了 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 外处处连续.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi}; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx de^x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(e^x \cos nx \Big|_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{n}{\pi} \left(e^x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} - n^2 a_n, \end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{(n^2 + 1)\pi} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx de^x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(e^x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \right) = -na_n \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^2 + 1} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} e^{\pi} + 1}{n^2 + 1} n \sin nx \right],$$

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

13. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq h, \\ 0, & h < x \leq \pi \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数:

$$\text{将 } f(x) \text{ 作奇延拓, 得 } \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad \text{再将 } \varphi(x) \text{ 作周期延}$$

拓, 得 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件, 且在 $(0, \pi]$ 上 $\Phi(x) \equiv f(x)$, 并有间断点 $x = 0, x = h$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h \sin nx dx = \frac{2(1 - \cos nh)}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nx, \quad x \in (0, h) \cup (h, \pi].$$

(2) 展开成余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓, 得 $\psi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in (-\pi, 0], \end{cases}$ 再将 $\psi(x)$ 作周期延拓

得 $\Psi(x)$, 则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件, 在 $[0, \pi]$ 上 $\Psi(x) \equiv f(x)$, 且有间断点 $x = h$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^h dx = \frac{2h}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^h \cos nx \, dx = \frac{2 \sin nh}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \cos nx, \quad x \in [0, h) \cup (h, \pi].$$